

APOLLONII PERGÆI

CONICORVM

LIB. V. VI. VII.

&

ARCHIMEDIS

ASSVMPTORVM LIBER.

APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.

PARAPHRASTE

ABALPHATO ASPHAHANENSI

Nunc primùm editi.

ADDITVS IN CALCE

ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER,

EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.

SERENISSIMI

MAGNI DVCIS ETRVRIÆ

ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA

In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.

IO: ALFONSVS BORELLVS

In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.

AD SERENISSIMVM

COSMVM III.

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

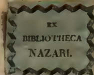




FLORENTIÆ,

Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.

SVPERIORVM PERMISSV.



AD SERENISSIMVM

COSMVM TERTIVM

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

IO: ALFONSVS BORELLIVS F.



AVD puto, Serenissime Princeps, timorem cœlestis irę, sed Amorem potius, & beneficentiam primùm in orbe Deos fecisse; nec alios ab initio habitos cum Prodico censeo, quàm res humano generi summopere vtiles, & salutares. Et sanè consentaneum est in primorum hominum mentibus, quibus reuelationis lumen non affulsit, excitatam fuisse notitiam cuiusdam naturæ, quæ esset mundi veluti Princeps, & Parens, quotiescumque non perfunctoriè attenderet animum præcipuè ad bonitatis affluentiam, mirabiliumque, & insignium vtilitatum comprehensionem, qua Solaris splendidissima machina lumine suo ordinatissimè circumacto cuncta viuificat, fouet, ac nutrit; mirarenturque liberalitatem Telluris, cùm tot opes, ac copias plantarum, fructuum, animalium è sinu suo veluti mater benigna mortalibus præbet. Hæc & similia dum prisci homines contemplarentur, fieri non potuit, quin tantorum munerum largitores grato affectu prosequerentur. Neque alia ratione cùm viri heroica virtute præditi artes, & inuenta præclara valdè vtilia ingeniosè iuxta, ac liberaliter mortalibus con-

tuliſſent, ſumma veneratione talem, ac tantam bonitatem ſuſceperunt, & Diuinitatis honores eis deſignarunt, vt Cereri, Baccho, Herculi, Mercurio, & alijs. Horum autem illi præſtantiora bona attuliſſe humano generi cenſendi ſunt, non qui fragilem, & limo affixam noſtram partem, ſed qui animum Diuinæ auræ participem eruditione, ac ſapientia perfecerunt, & ornarunt. Hinc artem, & facultatem illam tradentes, qua vaſti maris planitiem intrepidè perambulare non dubitamus coactis ventis imperata facere, ibidemque verſantes acu magnetica itinera ad vnguem menſuramus, & terræ plagas, & cœli, ſtellarumque loca, & ſitus medijs in tenebris conſtituti clarè conſpicimus. Vel hinc qua pondera immenſa puſillis noſtris viribus tanta facilitate mouemus, vt terram vniuerſam è ſuo loco transferre ſe poſſe non diffiteretur magnus ille Archimedes, ſi haberet, vbi pedem extra illam figeret. Aut qua naturæ miracula in elementis, plantis, animantibus perſcrutamur. Quaue ex fragili vitro linceos oculos veluti efformantes adeò cœlo proximi efficimur, vt ferè ſummas mundi partes, & ſtellas innumeras hactenus inconſpicuas contrectare videamur. Aut eam tandem doctrinam Aſtronomicam, qua in Cęlum tranſuolamus, duabus nimirum alis Geometriæ, & Arithmeticæ, quibus Diuinæ Sapientiæ theſauros contemplando, ſumma dulcedine in hac mortali vita, gloriæ, felicitatiſque illius ineffabilis participes efficimur.

Sed quia felices admirabilium rerum inuentores vel fortunæ, vel temporum iniuria plerumque nequeunt ſua ſtudia, licet illuſtria, & ſalutaria poſteritati

tranſmit-

transmittere, ideo viris principibus singulari virtute præditis, sine quorum auctoritate, & munificentia bonæ illæ artes omnino depressæ, contemptæ, & squalidæ deperirent, dum eas diuino instinctu promouent, augent, atque in vitam reuocant, ne dum pares, sed maiores gratias ijs habendas prisci homines censuerunt, quàm inuentoribus ipsis, cùm ipsi bonis illis alioqui non duraturis genus hominum beauerint.

Atqui inter istos Heroas dignissimum sibi meritò locum vindicarunt Maiores tui, Princeps Serenissime, quibus gratitudinis perpetuam deberi memoriam eruditi omnes fatentur. Quippe postquam Barbarorum incursionibus Europa vniuersa, & Italia Princeps eius prouincia prisco nitore amisso, omni ornatu litterarũ, artium, bibliothecarum, lycęorum, imo humanitatis, & politiæ spoliata diù iacuisset, Diuino fauore primus omnium surrexit Magnus ille Cosmus Mediceus, qui viros doctrina eximios cum vniuersa supellectile Grecæ sapientiæ Constantinopolitani Imperij calamitatem fugientes eo affectu complexus est, vt omnium Musarum parens appellari deberet, qui ob liberalitatem plusquam regiam, & beneficentiam vbique terrarum effusam, atque ob alia heroica gesta Pater Patrię prius salutatus fuerat. In eius locum successit Laurentius nepos, qui non ferro, & cęde, sed ciuili prudentia, & alto consilio Patriam, & pene Europam moderatus est: nec modo Poëticis leporibus ornatus, sed profundissimæ Philosophiæ Platonicæ innutritus, eamdem doctrinam opera, & studio potissimum Marsilij Ficini è Gręco translatam illustratamque posteris transtulit. Bibliothecam insuper Laurentianam à maioribus inchoatam comparatis

vndique

vndique manuſcriptis codicibus ſummo impendio, ſummaque cura locupletauit. Iſq; filium reliquit Leonem X. Pont. Max., qui vniuerſi orbis viros eruditos dilexit, fouit, amplificauit: Bibliothecam Vaticanã mirificè inſtruxit: Vrbis Lyceum à fundamentis erexit, codicibus, & viris doctrina magnis ornauit, atq; priſca barbarie omnino deleta aureum litterarum ſæculum reſtituit. Sed Coſmus ille primus Magnus Dux Etruriæ mihi nunc non reticendus, qui præter præclara bellica, & politica facinora, quibus Etruſcum Imperium auxit, atque firmauit, promouendis diſciplinis ſedulò intentus Athenæum Piſanum, vt cum maximè reparauit, vt profeſſoribus diſciplinarum fama præſtantibus nobilitauit: Florentinam Academiam inſtituit, Pandectarum libros ad fidem egregij, & vetuſtiſsimi codicis manuſcripti ampliſsimè excudi iuſſit: tot inſignes Græci, Latini, Etruſci idiomatis ſcriptores vigilijs, & labore eruditiſsimorum virorum illuſtratos typis edendos curauit: Paulum Iouium cum primis, & Io:Baptiſtam Adrianum ad ſui temporis hiſtorias conſcribendas ampliſsimis oblatis præmijs perſuaſit. Virtutes, atque opera tam Magni Parentis imitatus eſt Franciſcus, qui in Imperio ſucceſsit, & antiquitatis ſtudio maximè delectatus, præclaras, atq; innumeras venerandæ vetuſtatis reliquias, lapides, gemmas, numiſmata collegit. Hunc excepit Ferdinandus primus verè litteratorũ Mecoenas, qui Bibliothecam codicibus Hæbreis, Chaldæis, Syriacis, Egyptijs, Perſis, & Arabicis (inter quos hi libri Apollonij, & Archimedis extant) feliciſsimè ditatam reliquit, atque eruditiſsimos viros Hieronymum Mercurialem, Petrum Angelum, Iacobum Mazzonum, Io:

Bapti-

Baptiſtam Raimundum,totq; alios largiſsimis ſtipendijs euocauit, atq; aluit; Sacroſanctaq; Euangelia fidei propagandæ ſtudio imprimi,Euclidem quoque, Auicennam, Geographiam Nubienſem typis nitidiſſimis Arabicè omnia edi curauit. Non abſimilis litterarum amore Coſmus Secundus, cuius nomen,ac gloriam magnus ille Galilæus erga Principem de ſe optimè meritum gratiſsimus in cœlum vexit, ac inſculpſit;
» Vir nempe(vtGaſſendus ait) ſuper æthera notus; quo
» alium non extulit ætas hæc noſtra glorioſiorem; quip-
» pe tametſi orbis terrarum laudatis virorum illuſtrium
» dictis, factiſq; circumſtrepit, horum tamen omnium
» memoriam ſilentium altum breui inuoluet: nomen,
» quod ille cœlo inſcripſit, donec cœleſtia curæ erunt,
» apud homines perennabit. Tandem Ferdinandus Secundus ingenij perſpicacia mirabilis, maieſtate imperij præclarus, virtutibus,& Philoſophia illuſtrior feliciter regnat: is eſt, cuius munificentia, ac fauore Europa vniuerſa in Etruſca hac regia (ne aulicum decus, aut cultum, nobilium obſequia,& famulitium, Muſæum ampliſsimum,ac ditiſsimum referam) eruditorum frequentiam philoſophantium, diſceptationes,ac perpetua exercitia literaria æſtimari, ac florere merito ſuſpicit, & veneratur; cum Muſæ reliquis in aulis tantũ non neglectæ huc ſe ſe recepiſſe veluti in ſedem ſuam videantur; hìc enim in delicijs habentur ſectiones anatomicæ, cœleſtes obſeruationes, chimica eſperimenta, vniuerſęque naturalis philoſophiæ accurata inquiſitio. Vno verbo hinc credula philoſophia exulat; non hominum libri in pretio habentur, ſed Dei volumen, ſcilicet rerum natura veris,accuratiſq; experimentis ſummo ſtudio indagatur, & colitur. Præcla-

ris

ris hisce studijs lactatus, & innutritus es, Princeps Serenissimè, tot tantorumq; heroum progenies, quorum virtutes incomparabiles,& egregia gesta consentaneū est in te vno veluti foco speculi parabolici simul collecta, & vnita splendescere, vt totas vires suas summa virtus experiatur, atq; ineffabilem bonitatem, beneficentiæq; studium, virtutum, artium, scientiarum cultum à maioribus acceptum studiosè, & religiosè conserues, atq; ad posteros auctum transmittas.

Si igitur hominum genus natura dictante primum Deo Op. Max., & beneficentissimo gratias iustis honoribus, & memori mente persoluendas esse decreuit; atq; ne memoria beneficiorum deleretur templa, fana, festos dies, & ludos instituit. Secundo loco eosdem ferè honores Heroibus, ac Principibus statuit, nō his qui armis, & cęde potentiam violenter sibi vindicarunt, sed qui præstantibus virtutibus ornati magna beneficia in homines contulerunt, sique eos non humanis, sed diuinis laudibus celebrari iussit, potiori iure tibi, Princeps Gloriosissimè, pręclarissimorū heroum, ac virtutum hęredi plausus debitus, honores, laudes, & grati animi monumenta ab eruditis Europæ viris offeruntur. Quandoquidem magna,& certa illos spes tenet amplissimum patrimonium heroicarum virtutū, quod Cosmus Pater Patriæ, Laurentius magnificentiæ exemplar, Leo sui sęculi felicitas, insequentesque generosissimi Principes, atq; Heroes de genere humano, & bonis litteris optimè meriti tibi reliquerunt non ad fastum, sed ad imitationem, & stimulum gloriæ, nec externè, sed in animo, & cordis sacrario piè a te, ac reuerenter curandum, seruandum,amplificandum ea pręcipuè qua polles pręclara indole, ingenijq; acumine,

mine, ac felicitate, amoreq; ſcientiarum, ac bonarum artium, quibus te Deus, & Natura indulgentiſsimè cumulauit. Hoc quidem ſummopere precatur, & vouet eruditorum Reſpublica, ò Princeps longe incomparabilis, idque vaticinatur ex hoc tuo prę̨claro decore, & ſummæ bonitatis ſpecimine: Quippe, ò Principum decus, & ſtudioſorum delicium, perbellè docuiſti virtutis heroicę magis proprium eſſe benefacere, & alijs prodeſſe, quàm laudes meritas captare, & exigere; dum veluti epulo lautiſsimo in hac ſolemni pompa tuarum nuptiarum, ſcientiarum cultores donatos voluiſti; quid enim pretioſius, & magis expetitum veritatis ſtudioſis præbere poſſes, quàm Quintum, Sextum, & Septimum libros Conicorum Apollonij Pergæi hactenus deploratos, atq; lemmata Archimedis, quæ Sereniſsimus Ferdinandus Secundus inclytus, atque optimus parens tuus ex Arabico verti, & typis excudi ad communem reipublicæ litterariæ bonum iuſsit? Tanto ergo pro beneficio

— grates perſoluere dignas
— Non opis eſt noſtræ,
Numina tibi
— prę̨mia digna ferant, quę te tam lęta tulerunt
— ſę̨cula. qui tanti talem genuere parentes.

CAVE CHRISTIANE LECTOR.

ABalphatus Aſphahanenſis Apollonij Paraphraſtes religione Maumedanus fuit; quapropter aliquot locis more ſuę Gentis non modo Regi ſuo Abicaligiar Carſciaſeph nimium adulatur, verùm etiam impiè loquitur. Nihil tamen omiſſum eſt, vt antiquus Codex integrè, fideliterq; exhiberetur. Hęc eadem de Archimedis interprete dicta ſunto. De his te præmonitum volui, ne inter legendum piæ aures tuæ vel minimùm offenderentur.

Vale.



IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS.

PROOEMIVM

ABALPHATHI FILII MAHMVDI, FILII ALCASEMI, FILII ALPHADHALI ASPHAHANENSIS.

LAVS DEO VTRIVSQVE SECVLI DOMINO.





ATHEMATICA quamuis practica ſit ſcientia, ac diſciplina, cuius legibus, & præceptionibus diſponitur, atq; dirigitur intellectiua potentia ad abſolutam, perfectamque imaginum cognitionem, præſcindendo à materijs, qui eſt primus gradus aſcenſionis à ſenſibilibus ad intelligiqilia; nihilominus ſuarum claritate demonſtrationum, non ſolùm ab alijs differt ſcientijs verùm

etiam longiſsimè ijs præſtat, atq; præcellit, eò quòd fæcium, ſordiumque dubitationum, & aliorum huiuſmodi generis accidentium expers omninò ſit, atq; libera. Ea autem propter ſe habet ad ſcientificam potentiam, quemadmodùm habent ſe limpidiſsima quæque orbi ſolis oppoſita ad viſiuam potentiam. Ex quo ad illam comparandam, conſequendamq; non excitatur intellectiua duntaxat vis, verùm etiam multùm exacuitur, atq; delectatur, ponderatis præſertim, expenſisq; illius demonſtrationibus, & certiſsima earum comprehenſa, & cognita veritate. Tunc quippè huius veritatis percepta animus odorationis ſuauitate, auidè, & ardentiùs appetit conſequi ea omnia, quæ illius ſuggerunt demonſtrationes, earumque potiri. Subindè verò procedere conatur vltrò ad vltimum finem, nempè ad proprietatum, & obiecti illius cognitionem, excelſitatem, atque præſtantiam comparandam, tandemque ad ea omnia, quæ ad ipſam ſpectant. Quod quidem luminis cùm ipſius affulſerit ſtudioſis, & quàm præcellens ſit, animaduerterint, omnes ſuos contulerunt conatus ad libros componendos, conſcribendoſq; de ipſius elementis, principijs, ac omnibus ijs, quę indè deriuantur, & eò ſpectant. Solidiora porrò profeſsionis huius fundamenta omnium primus iecit Euclides in eo libro, quem de elementis inſcripſit, in quo fundamentales continentur rationes linearum tam rectarum, quàm curuarum, nec non ſuperficierum prouenientium vel ex earum ſingulis vel ex omnibus ſimul ſumptis. Rationes prætereà habentur ſolidorum prouenientium, vel

ex

ex ſuperficiebus rectilineis, qualia ſunt habentia baſes; vel ex curuis, qualia ſunt ſphœrica; vel ex hiſce compoſitis, quales ſunt ſuperficies Cylindrorum, & Conorum. Verùm enim verò figuris ex ſegmentis ſuperficierum planarum prouenientibus, & cuiuſlibet etiam Solidorum Sphœricorum, Cylindricorum, atque Conicorum nullum hactenùs iactum erat fundamentum, aut præmiſſa elementa, vel fundamenta aliqua. Ex quo illi priſci librorum Scriptores aliquid de ijs innuebant duntaxat, & quidem leuiter. De Sphœricis autem aliquid ex eorum legebant proprietatibus, & paſsionibus; ſiue ex proprietatibus ſegmentorum indè prouenientium; vel figurarum in ea incidentium; vel ex accidentibus quibuſdam ipſius Sphœræ, quæ ex eius procedunt motibus; vel quia ſe inuicem includunt, & componunt. Nam Sphœra aliqua opus illi erat ad Sphœræ vniuerſalis cognitionem conſequendam vna cum eius orbibus, ac motibus, & ad inuicem atque ſua centra applicatione. Et id tandem, donec librum Almageſti compoſuit Ptolomæus, in quo ea omnia recondidit copiosè, quæ illi anguſtè, & leuiter hoc de argumento ſuis innuebant ſcriptis, tradens non ſolùm methodum, ac rationem eorum aſſequendi cognitionem, ſed, & inſtrumentorum etiam vſum. Quod profectò iactum fuit tamquàm vniuerſale quoddam fundamentum, ac principium ea omnia comprehendens, quæ ad Sphœrica pertinent; vndè hac in re ſatis abundè ſtudioſorum ſiti, & deſiderio conſultum fuit. Porrò Appollonius profeſsionẽ, & diſciplinam hanc ad ſupremum per-

ſectionis perduxit gradum, Conicorum componendo librum, qui Conicarum ſectionum complectitur proprietates, quæ ſublimiorem, eminentioremque diſciplinæ huius ſibi vindicant locum. Et ſane tot propoſitionibus, totque figuris illum ditauit, vt admirabiles illæ nuncupari meruerint, eò quòd contineant lineas curuas, ſeu medias inter rectas, ac circulares ſeſe inuicem ſecantes; adeoque miros quidem fundunt ſenſus, & proprietates. Quos quidem omnes libros, qui diſciplinæ huius fundamenta ſunt, ad Arabicam tranſtulere linguam illius ſtudioſi. Quamuis autem liber iſte Conicorum præſtantiſsimus ſit, tam ratione ſui, quàm præclariſſimi Auctoris, nihilominùs nimiam ob illius obſcuritatem, difficultateſque obuiam occurrentes, ac profundiſsimos, quos continet ſenſus; tum etiam ob innumeras, & admirabiles figuras, & propoſitiones; tandemque ob temporis diuturnitatem, ingenteſque perferendos labores ab interprete, qui eùm ex Græca transferat lingua, dudum neglectus fuit, ac penè etærnæ datus obliuioni, vt nemò hactenùs illum, vel Commentarijs illuſtrauerit, vel congeſſerit in ordinem, quamquàm ſummè ſit neceſſarius, ac vtiliſsimas complectatur propoſitiones, & figuras. Quapropter diù ſepultus, & ignotus iacuit, & penè ad defectum vſque, ac interitum, cùm apud Diſciplinæ ſtudioſos, tum etiam ipſos profeſſores, & fragmenta ex illo circumferebantur. aliqua, & ea ſanè faciliora, quia obſcuriora euitabant omnes, atque declinabant; vno verbo integrum hactenùs viderat nemo. Hinc mihi famulo

viſum

visum est, me Reipublicæ Literariæ gratam rem facturum, si eum in integrum restituam, ac in vnum congeram volumen, vt ita redactus facilis sit portatu, sub omnium versetur oculis, omnium teratur manibus, & ad reliqua facilior reddatur aditus.*Quem etiam librum comparare studui Bibliothecæ domini nostri Regis præstantissimi, munificentissimi, doctissimi, iustissimi, victoris, triumphatoris, Fidei defensoris, celsitudinis Monarcharum, gloriationis sui generis, gloriæ religionis, solis Regum, Abicaligiar Carsciaseph Filij Alì, Filij Phrami, Filij Hasami, Principis Fidelium, quem incolumem, ac sospitem seruet Deus, eiusque deprimat hostes, & proterat osores. Nunc autem aliquid de ordine, & rerum dispositione, ac concisa breuitate dicendum nobis superest. Nam rerum ordo, & accommodata dispositio id intelligentiæ afferunt auxilij, quod in scientijs comparandis luculentissimæ demonstrationes; concisa verò breuitas, ac suis terminis necessarijs expedita, & ritè disposita, eandem penè proportionem habet ad intelligentiam, ac causa ad causatum. Ea autem propter ordinis conseruatrix virtus venatio dici sólita est, & satis quidem appositè, & eleganter. Nam concepti sensus, & in mente comparati, si intra ordinis cancellos includantur, singulos suis dispensare momentis procliuè poterit conseruatrix rerum illa virtus. Simillimi, alioquin erunt feris per vastas vagantibus solitudines, ac nullo coércitis vallo, quorum imagines, & motus ita sese offerunt conspicienti, & contemplanti, vt nullo negotio eas capere,

* Impie adulatur Regi suo Paraphrastes Arabicus.

capere, & aucupari ſe poſſe arbitretur, at cum id præſtare tentat, ſtatim dilabuntur, atque euaneſcunt. Ea planè ratione termini rerum ſingulos in mente conceptos ſenſus deſignantes, niſi ſuo coërceantur ordine dilabuntur, & euaneſcunt; præcipuè cùm modò hanc, modò illam ſundant ſignificationem, cùm iuxta labentis temporis varietatem, tùm diuerſitatem regionum, & prouinciarum, vt non eadem vbique, & ſemper ſit par ratio, licet ijdem in anima maneant habitus. Ex quo palam, & planè relinquitur, quòd acquiſiti illi termini non inhæreant, quemadmodùm ſubſiſtenti eſſentiales inhærent differentiæ; neque etiam quemadmobùm proprietates neceſſariò conſequentes ſuo inhærent ſubiecto; ſed ea inhærent ratione, quá accidentia difficilè, ac tardè amouibilia. Quandoquidem termini eiuſmodi vocabula ſunt quædam rebus impoſita, & applicata ad ſenſus commodè eliciendos, atque eruendos. Quod autem vel diuino factitatum eſt inſtinctu, vel Prophetica inſpiratione edoctum, ſicut indicat nobis Altiſsimus Deus dicens: *(in Alcorano) & docuit Adamum cuncta nomina; vel iudicio, & calculo ſapientum virorum, quemadmodùm præſtitiſſe legimus primos illos artium inuentores. & ſcientiarum; vel magna aliqua neceſſitas hominum coëgit vulgus ad eiuſmodi excogitandos terminos, rebuſque imponendos, ac tranſlatione quadam vocabula mutuanda, & ad alias, atque alias res transferenda, ex quo ſynonymorum ea enata eſt copia. Nec vllus profectò ſapientum, qui has profeſsi ſunt Diſciplinas, aut qui ipſorum

* *Inſulsè ex Alcorano profert, quæ ſunt in Sacra Geneſi.*

ſorum

ſorum ſecuti ſunt veſtigia, hanc imponendorum terminorum rationem aſpernatus ſubindè eſt, aut ab illa abhorruit; quinimò acceptiſsima ſemper omnibus fuit, vt quæ maximum rerum intelligentiæ ſplendorem affert, & claritatem. Eandem igitur hanc ob cauſam in colligendis, digerendiſque hiſce famulus libris, antiquorum ſapientum, & artium profeſſorum, inuentorumque inſiſtens veſtigijs, terminos, & vocabula ſingulis rebus imponere, & earum vim breui declarare definitione cenſuit, vt ita ſuis coërcita omnia limitibus nequeant in varias partes, & ſenſus diffluere, ad conciliandam lectori inter legendum hos Apollonij libros eam, quæ fieri poteſt, facilitatem. Innui præterea eandem etiam ob cauſam obſcurioribus in locis expoſitionem aliquam, ne vlla ſubindè relinqueretur difficultas ad mentem Auctoris cumulatè aſſequendam.

Tandem lectorem meum enixè rogo, vt excuſatum me habeat, ſi mendum aliquod, aut erratum meam ſubterfugerit diligentiam. Interea Deum ſuppliciter deprecor Altiſsimum, vt nos ad ea, quæ vtiliora nobis ſunt, demúm perducat.



Ne vacaret pagina ipsiusmet Apollonij Pergæi ex Epistola ad Eudemum Argumenta in quatuor Conicorum libros posteriores, qui Græcâ linguâ iniuria temporum perierunt, hic apponuntur, quorum tres ex Arabicis M.SS. nunc exhibentur.

Reliqui autem quatuor libri ad abundatiorem ſcientiam pertinent. Quintus de Minimis, & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & Similibus coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus Problemata conica determinata.

Hæc eadem Pappus Alexandrinus lib. 7. Mathemat. Collect., atq; Eutocius in Commentar. ad Apollonium.





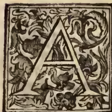
ABRAHAMI ECCHELLENSIS

IN LATINAM EX ARABICIS

Librorum Apollonij Pergæi versionem

PRÆFATIO.





APOLLONIVS Pergæus vetustissimus, ac magni nominis Græcus auctor otto de Sectionibus Conicis conscripsit libros: Horum priores quatuor hactenus omnium teruntur manibus; posteriores verò, nescio quo fato, & rerum vicissitudine sunt amissi, ac non sine magno literatorum animi mœrore iamdudum deplorati, & nusquam perdiligenter non quæsiti ab ijs præsertim, qui Geometriæ, & Matheseos operam nauant studijs, sed frustra diu. Tandem deprehensum est, hos, quemadmodum, & reliquam penè Grecæ sapientiæ supellectilem ad Arabum migrasse scholas, ibique Arabicè conuersos, & Arabicis indutos ornamentis, in illius gentis tamquam extorres, & inquilinos latitasse Bibliothecis. Quamobrem eorum miserti vicem Serenissimi Ma-

gni Etruriæ Duces, inde magno ſoluto pretio redemerunt, ipſorumque tam præclara opera quaſi iure poſtliminij vindicarunt, ac demum patrio ſolo reddiderunt. Attamen ſat non fuit, aut viſum eſt ſummis iſtis Principibus Apollonium in libertatem aſſeruiſſe, & ex Barbarorum eripuiſſe manibus, ac in celeberrrima totius Europæ Auorum repoſuiſſe Biblioteca; ſed omnem nauarunt operam, & ſtudium, vt Latinà etiam donati linguà in literatorum gratiam publici iuris fierent. * Ea propter verè Magnus ille in omnibus Ferdinandus primus celeberrimam eam erexit Typographiam è nomine gentilitio Sereniſſimæ familiæ *Mediceam* nuncupatam, cui nullam ſimilem, aut parem vidit Chriſtianus Orbis, aut viſurus vnquàm eſt; ſiue characterum, præſertim Arabicorum, ſpectes copiam, ſiue varietatem, ſiue nitorem, ſiue elegantiam. Dictis hiſce profectò noſtris ſpectatiſſimam, ac manifeſtiſſimam fidem faciunt Sacroſanti Euangeliorum libri, Auicennæ, Euclidis, aliaque Arabica opera ijs edita typis, quæ omnibus Orientis gentibus admirationi ſunt, atque adeo auidiſſimè expetuntur, ac magno comparantur pretio. Sed hæc non typis duntaxat excudi iuſſit munificentiſſimus Princeps, verùm etiam viros linguarum peritiſſimos ingenti conduxit ſtipendio, qui Arabicorũ Codicum vacarent verſionibus. Hos autem inter principem obtinebat locum Ioannes Baptiſta Raimundus vir, & ſcientiarum cognitione, & linguarum peritia omnium ore celebratiſſimus. Is autem, & ſcriptis literis, & familiaribus cum amicis colloquijs Apollonij librorum verſionem ſæpenumerò pollicitus eſt. Imò erant, qui libris editis verſionem iam à Raimundo confectam, & perfectam eſſe, in vulgus iactarent. Verùm cum nunquam viſa fuerit eiuſmodi verſio, neque inter ipſius ſcripta reperta, neque in Aduerſarijs notata, aut catalogo ipſius librorum adſcripta, quæ omnia religioſè hactenùs conſeruantur, hoc vnum credendum ſupereſt, eam votis ſolùm ſuſceptam, & cogitatione delineatam fuiſſe; rem autem, aut quòd per otium ipſi non licuit, aut ob Codicis lectionem, & ſcripturæ difficultatem, quæ maxima eſt, vel ob orationis abſtruſæ, & ſermonis ancipitem, ac multiplicem verborum poteſtatem, vel tandem aliquam aliam ob cauſam, quàm, conijcere difficile eſt, perficere non potuiſſe.

* *Fallitur C.V. Ger. Io: Voſſius hoc tribuens Sixto V. P. M. C. 17. 29. de ſcient. Mathemat.*

Nihilo

Nihilo tamen minùs Magni Principis, Magni Filij, Magni Nepotes aut ab incœptis destiterunt, aut generosissimi animi dudum conceptum studium remiserunt. Quamobrem ante biennium scriptis à Serenissimo Principe Leopoldo literis officij plenis, & humanitate, tam proprio, quàm Magni Ferdinandi II. fratris nomine, imposita mihi fuit hæc prouincia optatæ diu, & penè desperatæ versionis. Quo sanè, vt ingenuè fatear, nihil iucundius, nihil carius, nihil antiquius accidere mihi poterat; quòd hac data occasione, aliquam grati animi significationem exhibere me posse putabam Serenissimo illi Principi, cuius amplissima in me beneficia sum expertus. Memini profectò, nec ex animo meo excidet, imo clauo fixum trabali manet, quanta in me contulit Magnus Ferdinandus Secundus ornamenta, quanta in me vsus est liberalitate, & beneficentia, non tantùm dum fortuna mihi arridebat, non solùm dum res succedebant prosperè, non modò dum ad illum ab Amiro Fachraddino missus singulari felicitate fruebar, sed etiam in naufragio, & iactura illa barbarica, in Carrellina coniuratione, & proditione, in aduersissima fortuna. Sed hæc omnia magis à me exprimi possunt profundissimo silentio, quàm verborum, copia, aut oratione altius exaggerata. Verùm enim verò dum arbitrabar, mirificam nactum me esse opportunitatem gratificandi Principi de me optimè merito, & exhibendi aliquod grati animi signum, penè concepta excidi spe. Nam aperto Apollonij Codice, & coniectis in eum oculis duæ primo ferè intuitu sese mihi obtulerunt difficultates, quas à me neque superari, neque vinci posse prorsùs existimaui. Hinc summus, & abstrusus pudor, hinc plurimus sudor ingenuè omnia fateor. Et eò magis intimis animi sensibus angebar, quod ea versio non in secessu aliquo fiebat, & remotis arbitris, vbi aciem mentis abducere, difficultates commodè expendere, animoque intento, & libero lustrare quæ in rem essent, ac per otium possem, sed præsentibus grauissimis viris, & quidem, ex tempore, & nulla data præmeditandi facultate, interpretationem facere compellebar. Ea fortè illorũ præclarissimorũ virorũ de me erat opinio, & existimatio, quàm tamen parum absuit, quin penitus perdidissem, cùm vix, & ne vix quidem scripturam illam legere pos-

ſem, quæ prima erat difficultas. Nam puncta aberant diacritica imprimis (de punctis vocalibus hic non loquimur, nec eorũ inter legendum à peritis linguæ habetur ratio, aut negotium aliquod faceſſunt), nempè ea, quæ formam dant literis, literaſque conſtituunt, & ſine quibus literæ ſunt pura, ac nuda materia omni ſpoliatæ forma. Quid autem ſit materia omni ſpoliata forma, neque ipſi ſciunt Philoſophi, quorum id ſcire intereſt. Eodem prorſus ſe habent modo Arabum literæ, ſeu potiùs literarum ductus, & lineæ diacriticis hiſce carentes punctis. Eadem enim figura, ſeu linea, exempli gratia, ſi vnum ei ſuperponitur punctum erit N. ſi verò ſupponatur, B. ſi duo ſuperponuntur, T. ſi tria Th. ſi duo ſupponantur, I. & ſic de cæteris ferè omnibus arguendum eſt. Si quis autem percontabitur, quid erit illa figura, & linea, ſi nullum adſit punctum? reſpondetur materia ſine forma, & quid ſit prorsùs ignoratur. Augebant etiam lectionis difficultatem ipſæ literarum figuræ, quæ ita raptim, & curſim, licet elegantiſſimè, ductæ erant, vt vix ab inuicem quandoque, & identim diſtinguerentur. Hæc autem difficultas terruit quidem primo aſpectu ſed breui, & citius quàm credebam, ſuperata fuit, tum ſtudio, & diligentia, tum experientia, quàm ab ipſa ineunte ætate ex lectione eiuſmodi ſcriptorum generis comparauimus.

Altera difficultas, quæ ſe nobis obtulerat, maioris quidem erat ponderis, & momenti; verſabatur quippè circa diſciplinæ vocabulorum intelligentiam, & notionem, quorum ignari eramus, & penitùs ieiuni. At hanc quoque difficultatem facili negotio ſuperauimus ope, & opera Clariſſimi, atque Doctiſſimi Viri D. Ioannis Alphonſi Borelli Matheſeos in Piſana Academia profeſſoris celeberrimi, qui, & verſionem ipſam promouerat apud Sereniſſimos Principes, & Codicem comportauerat idem Romam, ac perpetuus mihi aderat Dux, & Magiſter. Et ita ſanè ea omnia, quæ ad Diſciplinæ, eiuſque vocabulorum notionem pertinebant, clarè, dilucidè, & explicatè ordine inſinuauit, vt breui meis auditoribus Matheſeos profeſſor viderer. Porrò quod hac in re magis mirandum eſt, nec ſilentio prætereundum, ea erat Viro illi Doctiſſimo ſingularis ingenij perſpicacitas, vt ſæpe in abſtruſis quibusdam locis, non ex integris,

tegris, inquam, præmiſſis, ſed ex vnica dictione totam illationem inde colligeret, non ſenſu, ſed totidem penè verbis, ac ſi Arabica legeret verba, & linguæ veteranus eſſet profeſſor. Proindè verius ipſi, quàm mihi adſcribenda eſt hæc verſio, longè tamen abſit omnis adulatio, & animi propenſio in virum amiciſſimum. Hac mutua contentione, & interpretandi, & vertendi trium Menſium ſpatio verſio noſtra confecta, & abſoluta eſt, in qua horis tantummodò matutinis propter nimios calores æſtiuos conſumpſimus. Et hæc de ratione verſionis poſteriorum librorum Apollonij, & methodo ſatis dicta ſint. Nunc de ipſo Apollonio, eiuſqne librorum Arabica verſione, & illius auctoribus nonnihil dicere, par, & conſentaneum eſt.

Apollonium ſub Achaz Filio Ioatham regis Iuda poſt Thaletem Mileſium Floruiſſe, Arabes perhibent Scriptores. Sic enim lib. 3. Chronicorum in Achaz ſcriptum reliquit Gregorius Barhebræus: *Poſt Thaletem celebris fuit in Geometricis præcipuè diſciplinis Apollonius Naggiar*. (ideſt faber lignarius) *Is compoſuit Tractatum de ſcientia Conicor. nempè de lineis, quæ neque rectæ ſunt, neque arcuatæ, ſeu curuæ, ſed inclinatæ*. Notandum hìc eſt vocem *Naggiar*, quæ Apollonio tribuitur, vt cognomen, & nos *fabrum lignarium* vertimus, poni (vt opinor) pro *Geometra*, & id fortè exindè, quòd inſtrumenta, quibus vtebantur Geometræ ex lignis olim conficiebantur. Quod, & indè conijcio, quia hoc idem vocabulum Euclidi quoque tribuitur apud eundem Gregorium ſic de illo ſcribentem. *At Euclides Naggiar ex Vrbe Tyro erat*.

De verſione autem librorum Apollonij in Arabicam linguam ita ſtatim ſubdit mox laudatus Gregorius: *Ex his autem verſi ſunt in Arabicam linguam tempore Almamuni ſeptem libri, eius tamen præfatio indicat, octo fuiſſe libros; qui quidem Tractatus cum alio Tractatu eiuſdē Apollonij cauſam dedere Euclidi ſuorum componendorum librorū longum poſt tempus*. In his longè videtur diſcrepare Gregorius à communi Chronologorum ſententia, & opinione, qui Apollonium Floruiſſe ſcribunt anno periodi Iulianę 4474. ideſt annis ante Chriſtum Dominum 240. adeoque multò iunior eſt, quàm facit illum Gregorius. Diſcrepat præterea ab iiſdem Chronologis in ætate Euclidis, quem Apollonio iuniorem agnoſcit,

vbi

vbi illi eum collocant in anno periodi Iulianæ 4430. ideſt ante Chriſtum Dominum annis 284. iuxta quàm opinionem Apollonius iunior erit Euclide annis 44.

Almamun autem ſub quo facta eſt librorum Apollonij verſio in Arabicam linguam ex laudato Gregorio Chalipha ſecundò ſalutatus eſt An. Heg. 203. ex omnium ſcriptorum ſententia, qui annus ex Tabula Acrarum Iſmaelis Sciahinſciah, quàm refert in hiſtoria Gentium, reſpondet Anno Chriſti Domini ſolari 826. plùs minuſue. Nam Hegiram accidiſſe anno Chriſti 631. habet Iſmaëlis Tabula contra omnium Chronologorum Orientalium opinionem, qui eam reponunt in ann. Chriſti 622. & vndecim Heraclij, vno excepto Eutychio Alexandrino, qui eam reponit in ſua hiſt. Eccles. in an. Chriſti 614. ſcribit enim ibi: *A Chriſto Domino noſtro vſque ad Hegiram ſunt anni* 614. In quo octennio integro diſcrepat ab alijs Chronologicis. Sed hæc leuiter tetigiſſe, ſatis eſt; non eſt enim animus hic temporum apices data opera excutere, nec id ſanè vacat, nec huius loci eſt.

Principem autem Almamunum, eam procuraſſe verſionem librorum Apollonij, non ſolùm facilè, ſed procerto credendum eſt. Nam is omnium ſcientiarum ſtudijs vehementiſſimè ardebat, proindeque congerendorum vndique librorum nunquàm finem faciebat, eratque in eorum interpretes prolixiſſimus. Mira ſanè, quæ de illius, ac proaui Abugiahphar Almanſur animi propenſione in literas, & literatos viros refert Sahadus Filius Ahmedi Andaluſij in Hiſt. Arabum. *Is*, inquit ibi, *erat ſtatus Arabum in gentilitate. Poſtquàm verò fauoribus proſequutus eſt Deus Altiſsimus Hacſemitas, deuolutque ad eos imperium, conuerſæ mentes ſunt, & intellectus à ſtupore, in quo iacebant, & exſuſcitata ingeniorum acumina poſtquàm extincta erant. Horum autem primus, qui promouendis ſcientijs operam nauauit, erat Abugiahphar Almanſur ſecundus Chalipha. Qui tametſi Iuriſprudentiæ deditiſsimus eſſet, & peritiſsimus; nihilominus, & Philoſophiæ vacabat ſtudio, ſed ardentius Aſtronomiæ. Cùm verò Imperij ſuſcepiſſet ſceptra Chalipha ſeptimus Abdalla Almanſun filius Aaronis Raſcidi, abſoluit ea, quæ inceperat Auus ipſius Almanſur, operamque dedit ſcientijs vbique inquirendis. Hinc Græcorum ſcripſit Imperatoribus rogans ſibi mitti quotquot*

haberi

haberi possunt Philosophorum libri, qui quotquot comparare potuerunt miserunt ipsi. Quibus ille vertendis peritissimos quosque selegit interpretes, & curam iniunxit interpretandi, & versi sunt eo studio maiori, quod fieri potest. Quo autem facto homines non solùm incitabat, sed & cogebat quodammodò, vt ijs legendis, & ediscendis operam darent. Ipse verò sapientes viros familiarissimè conueniebat, eorumque peramicè vtebatur consuetudine, atque plurimùm illorum delectabatur colloquijs. Nouerat, & quippe optimè, sapientes viros Deo Altissimo mortalium esse carissimos, ac ipsi coniunctissimos, eò quod sese dederunt animæ rationalis virtutibus comparandis, posthabitis, & contemptis ijs, quibus Sinenses, ac Turcæ, eorumque similes incumbunt. Hi enim ostentare amant artium Mechanicarum subtilitatem, animæ irascibilis gloriantur potentijs, & concupiscibilis iactant sese facultatibus. Cùm tamen hæc omnia communia cum ijs ipsa habere bruta, scire debeant; imò longè ab illis superantur. Peritia, & subtilitate artis ab Apibus, quæ sua examina, seu penarium sexangula mirâ construunt arte. Audacia, & fortitudine à Leonibus, alijsque feris, quibus in hisce haud comparandus est homo. Libidine, & Luxuria à suibus, atque alijs, quæ hic memorari necesse non est. Hacque de causa sapientes viri sunt lampades in tenebris, & mortalium omnium Domini. Et heu quàm turpe, atque deforme est terrarum hoc orbis theatrum, quoties suis caret sapientibus. Hæc Sahedus in Historia Arabum.

Nostram autem versionem hanc Arabicam quod attinet, alia prorsùs est ab ea, quæ sub Almamuno confecta est. Hoc planè patet ex ipsius Auctoris Abalphathi in præfatione verbis. Dicit quippè ibi, se eam adornasse versionem pro regis Abicaligiar Bibliotheca. Abicaligiar autem rex salutatus est, teste Sciahinsciah, Gregorio, & alijs, Hegiræ anno 372. nempè annis 169. post Almamuni inaugurationem ijsdem, quos mox laudauimus, auctoribus.

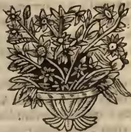
Versionem tamen illam, quæ sub Almamuno facta est, nequaquàm vidit nostræ huius versionis auctor Abalphath, quemadmodùm ex verbis eius, quæ ad septimi libri adiecit calcem, patet luculenter. Ibi enim, *puto* inquit, *me in hoc*, nempè in hac versione concinnanda, *quoscunque alios anteuertisse*. Itaque existimat is noster Auctor, se omnium primum Apollonij versionem Reipublicæ literariæ dedisse. Quod, & in ipsa quoque

innuit

innuit præfatione, afferens vſque ad ſua tempora nullam integram librorum Apollonij extitiſſe inter Arabes verſionem; ſed fragmenta quædam. Ex quo arguere eſt, aut eum minimè antiquiorem Almamuni vidiſſe verſionem, aut iſtam non fuiſſe integram, ſed Epitomem aliquam ex ſeptem Apollonij decerptam libris, de qua ille in præfatione. Vt vt ſit noſtra hæc alia prorsùs eſt ab ea, & ad ipſius auctoris calculos redacta, atque adeò integra, & omnium perfectiſſima, atque abſolutiſſima.

Cæterũ admonitum volumus benignum lectorem, nos in hac verſione adornanda ſatis preſsè Arabicam ſecutos eſſe phraſim, nec omninò elegantiam, & venuſtatem linguæ expreſſiſſe, arbitrantes id maximè pertinere ad fidelis interpretis partes, & officium.

Ea autem quæ occurrunt circa ipſam phraſim, & vocabula nonnulla obſeruanda, Arabicæ Editioni reſeruauimus, rati ea commodius, & magis ad rem ibi exponenda eſſe, & ſuis exprimenda characteribus. Interim benè vale, & hoc qualicunque fruere ſtudio, & labore.



IO: ALFONSI BORELLI

PRÆFATIO AD LECTOREM.

ACCIPE tandem, studiose Lector, in solemni hac pompa nuptiarum Serenissimi Principis Etruriæ Regio splendore à Serenissimo Magno Duce parata tamdiu deploratos, & expetitos libros postremos Conicorum Apollonij Pergæi, vtque sine mora mens tua epulis hisce lautissimis saturari possit, non te demorari diutine patiar in limine, recensendo scilicet nomen Apollonij, patriam, ætatem, & opera ab eo conscripta, neque insuper doctrinæ conicæ ortum, & progressum à primis incunabulis ad virilem vsque, & vegetam ætatem, ad quàm Apollonius eam euexit, propter quod facimus magnus Geometra cognominatus est; hæc enim trita iam sunt, & vulgaria: breuiter tantummodo percurram, quæ ad notitiam horum librorum facere videntur.

Illius pretiosissimæ bibliothecæ orientalis, quàm Serenissimo Ferdinando Primo gratitudinis ergo reliquerat Ignatius Neama Patriarcha Antiochensis libellum nitidissimè Arabicè scriptum mihi ostenderat Serenissimus Princeps Leopoldus Musarum decus, & gloria, nostrique sæculi lumen eruditum. Codici inscripserat Raimundus, siue quis alius: Otto libri de Conici d'Apollonio del Patriarca. *Summa lætitia libellum exosculatus, licet Arabici idiomatis sim prorsus ignarus, non potui me continere, quin saltem contrectarem, atque reuoluerem paginas illas; cumque præter figuras mihi satis notas quatuor priorum Apollonij librorum vidissem alias conicas figuras, in quibus ab vno puncto in eis collocato eductæ erant plurimæ rectæ lineæ ad conisectionem, illico in mentem venere illa Eutocij verba in expositione epistolæ Apollonij ad Eudemum:* Quintus, *inquit*, liber de Minimis, & Maximis magna ex parte agit; quemadmodum enim in elementis didicimus, si ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concauam ipsius circumferentiam pertinent, maximam esse, quæ per centrum transit, earum vero, quæ ad conuexam, minimam esse, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur, ita & de

conifectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, feptimi, & octaui libri propofitum manifeftè ab ipfo Apollonio explicatur. *Cúmq; poftea à quodam Maronita Arabicè callente accepiffem tractatum, feu librum quintum Apollonij effe illum, in quo figuræ prædictæ delineatæ erant, pariterque in fubfequenti libro fexto confpexiffem figuras alias exprimentes æqualitatem, & fimilitudinem fectionum conicarum, mihi certum fuit, verè Apollonij effe libros illos. Haud tamen negabo fcrupulum, ac dubitationem iniectam, ex eo quod textus ille Arabicus non præferebat in fronte Apollonij, vel vllius alterius nomen, & definitiones primi libri centuriam fuperabant, cum Apollonius non nifi nouendecim fuo primo libro appofuiffet. Infuper in prioribus quatuor libris non totidem figuras confpiciebam, nec omnino fimiles, eafdemque, nec eodem ordine difpofitas, ac in textu Græco Eutocij videre eft; quare cenfui librum prædictum epitomen effe Conicorum Apollonij ab aliquo alio confcriptam. Hanc quoq; præclarifsimi Torricellij fuiffe fententiam poftea didici ex eius Epiftola ad eruditifsimum Michaelem Angelum Riccium miffam. Perftiti tamen debere latinè verti lucubrationem tam eximiam, eruditifq; optatifsimam, nam nifi ipfifsimum opus effet Apollonij, faltem ex ijfdemmet libris epitome illa defumpta, & tranfcripta exiftimari debuerat.*

Igitur Serenifsimus Ferdinandus Secundus Magnus Dux munificentia verè regia, qua bonas artes promouere ftudet, annuente, & fummopere coadiuuante Serenifsimo Principe Leopoldo fratre Mathefeos, atque omnigenæ Sapientiæ perito cultore, atq; egregio vindice, præcepit, vt volumen Arabicum Romæ latinè redderetur ab Abrahamo Ecchellenfe linguarum Orientalium doctifsimo, & peritifsimo profeffore. Is quidem fumma alacritate negotio fufcepto primùm bono me effe animo iufsit; monuit enim nouum non effe apud Arabes libros nomine auctoris in fronte carere, oftenditque in proemio eiufdem codicis apertifsimè declarari effe libros Conicorum Apollonij paraphrafticè expofitos: deinde ex translatione priorum quatuor librorum patuit demonftrationes propofitionum penè non differre quoad doctrinam à textu Græco Eutocij, licet verbum verbo non refponderet: nec mirari paucitatem figurarum, quandoquidem vna, eademq; figura quatuor, aut quinque propofitionibus inferuiret. Incomparabili igitur gaudio perfufus Apollonium penè è manibus fublatum iterum amplexibus ftrinxi, & exofculatus fum. Sed moleftum fummopere fuit octauum librum deeffe: collegi tamen Io: Baptiftam Raimundum opufculum arithmeticum (quod in hoc codice Arabico fubfequitur libro Septimo Apollonij) pro octauo

eiufdem

eiusdem libro accepisse, pariterq; Hieronymum Lunadorum in libro de Romana Curia nobis imposuisse, cum octo Apollonij libros ex Arabico transtulisse latinè Raimundum typis publicauit; qui enim fieri potuit, vt octo libros dedisset is, qui an septem, aut octo libri essent non animaduerterat?

Modo operæ pretium erit ante oculos ponere formam, & dispositionem huius paraphrasis ab interprete Abalphatho editæ. Et primo sciendum est eum collegisse simul septem integros libros Conicorum Apollonij ex fragmentis, quæ hactenus apud Arabes sparsim circumferebantur, disposuisseque propositiones eorumdem librorum alio ordine, ac diuerso ab Apolloniano, relictis tamen numeris antiquis, nam in primo libro post primam, & secundam propositiones subsequuntur vndecima, tertia, quarta, septima, & sic vlterius semper ordine perturbato procedendo. Hac nempe ratione simul collectis in eadem figura pluribus propositionibus, quas in locis dissitis collocauerat Apollonius, putauit Abalphathus breuiùs se eas demonstraturum retenta semper Apollonij sententia, scilicet ijsdem medijs, & eodem progressu, quo vsus est Apollonius, demonstrat Paraphrastes easdem propositiones. An vero variare noluerit reuerentia retentus, vel potius nequiuerit virium defectu, (quippe ingenio non admodum felici, et inueniendi sagaci à natura donatus) non ausim affirmare. Superaddit quoq; numerosam farraginem aliarum definitionum, quibus compendiosiùs, & clariùs demonstrationes absolui posse profitetur, quod quidem non rarò ipse aßequitur; aliquando verò ob affectatam nimiam breuitatem obscurior efficitur: accidit quoque, vt aliquæ definitiones inutiles, & otiosæ sint, vel repetitio declarationis earumdem prolixitatem creet maiorem.

Animaduersione dignum est, quod Manuscriptum licet non distinguatur capitibus, aut paragraphis, sed continuo, perpetuoquè sermone procedat more Arabum, in eo tamen numerorum tria genera passim occurrunt, qui omnes ferè interlineares, pauci quidem in margine positi, aliqui rubris characteribus depicti, alij vero positi super alios numeros in eadem linea, veluti fractiones numerorum describi solent, hac ratione $\frac{9}{49}$. 50. *vel* $\frac{16}{68}$.69. 70. 71., *& licet rarò synceri, & veridici sint, coniecì tamen supremos numeros indicare partes, seu sectiones, in quas Abalphathus librum distribuit, atq; partitur: infimi verò numeri docent quotnam propositiones in vnaquaque sectione contineantur: itaque hi numeri* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71. *significant in lib.* 5. *Sect.* 16. *contineri Apollonij Propositiones* 68.69.70.71. *reliqui numeri interlineares sic dispositi* 24. ex 5., *vel* 37. ex 6. *citationes sunt, indicantque Prop.* 24. *lib.* 5. *Conic.*

Apoll., vel Prop. 37. lib. 6. Sed mirum quàm mendosi sint omnes ferè numeri huius codicis! in solo enim quinto libro frequenter duæ, vel tres propositiones diuersæ vno, & eodem numero designantur, & è contra plures, & separati numeri nulli propositioni tribuuntur; nuspiam enim reperies propositiones 16. 17. 18. 24. 40., & quamplurimas alias. Citationes postea inter propositiones interpositæ mendosissimæ, obscuriores tenebras obducunt, quare non parum laboris, & molestiæ habui, vt propositionibus horum subsequentium librorum numeros debitos, & legitimos assignarem; nam prioribus quatuor in libris propositionum numeri licet perturbato ordine dispositarum facilè restitui, & corrigi potuerunt ex Græco exemplari, at in libris 5. 6. & 7. numeros erroneos seriè propositionum alterata nisi ariolando assequi quis poterit? Cum ex Arabico codice mendas hasce numericas corrigi posse Excellentissimus Abrahamus Ecchellensis desperasset, repetitis litteris, vt coniecturis negotium perficerem, iussit; & siquidem propositiones Apollonij vno, vel altero tantum ordine disponi potuissent, forsan mentem auctoris conijcere arduum non fuisset, sed inter multas, & varias series, quibus conica doctrina exponi posset, si eam, quàm Abalphathus elegit, assecutus fuero, fortunæ tribuendum erit.

Sed quid ego minutias numerorum consector, cum in textu ipso insuperabiles ferè, & maioris momenti difficultates supersint? nulla propositio fuit, in qua sententiæ, verba, aut numeri, aut litteræ non fuerint multifariam permutatæ, mutilatæ, aliæ pro alijs repositæ, atque in propositionibus plerisque tituli ipsi, & expositiones summopere deprauatæ, vt prorsus ignoraretur quid nam demonstrandum proposuerit Apollonius. Itaque verba, litteræ, numeri, citationes, imò sententiæ deficientes, aut permutatæ vna cum affectata Paraphrastis Arabici breuitate, & multiplici, & noua nomenclatura cimmerias tenebras effundebant. Hasce in angustias redactus, quod potui, feci, vt germanum sensum Apollonij, & correctissimum exhiberem textum.

Hanc tamen cautionem adhibui, vt in notis semper bona fide apponerem ipsissima verba textus, quæ transtulerat ex codice Arabico me præsente Excellentissimus Ecchellensis, ibidemque rationes apposui mutationis, & correctionis factæ. Itaque persæpe vbi sententia videbatur obscura, neque distinctè explanata, tunc quidem meis verbis declaraui. Et quia multoties ob nimiam paraphrastis breuitatem, vel librariorum vitio propositiones nō solide demonstrantur, vel nequeunt ex præcedentibus deduci, addidi ex meo penu lemmata nonnulla, quibus euidenter confirmantur, quæ in

textu

textu ambiguitatem aliquam præseferebant. Apposui quoque prolixè propositionum casus omnes neglectos in textu, eorumque demonstrationes. Sed hisce omnibus in rebus religiosus adeò fui, vt omnia diuerso charactere in notis memorauerim, exceptis tamen ijs, quæ minoris momenti sunt, vt litteræ transpositæ, & deficientes, & verba aliqua impropria, & non significantia, quæ commemorare non censui, ne volumen in immensum excresceret.

Tandem potuissem quidem abundantioris doctrinæ gratia non pauca meo marte hisce libris superaddere non omnino forsan contemnenda, sed parcus adeo fui, vt tantummodo quæ ad illustrationem, & ornatum operis facere videbantur, adiecerim suntq; nonnullæ propositiones additæ, quæ nouæ, & forsan inelegantes non erunt.

Considerandæ modo sunt difficultates à præstantissimo, et doctissimo Claudio Midorgio propositæ contra Manuscriptum Arabicum Apollonij, quod Clarissimus, & de bonis litteris optimè meritus Golius ex oriente detulit, eædemq; difficultates eodem iure nostrum Manuscriptum, quod Golianum, petunt. Verba Mersenni in præfatione Conicorum Apollonij suæ synopsis Mathematicæ hæc sunt. Suspicatur autem Claudius Midorgius hos tres libros, (*scilicet* 5. 6. & 7. *Conicorum Apollonij*) esse cuiusdam Arabis sub Apollonio latentis, quòd in quinto suo libro primam propositionem sexti Apollonij superius allatam non solum in cono recto, sed in quouis etiam scaleno, & illorum portionibus quibuscumque datis possibilia quæque demonstrat. *Hæc quidem ratio quanti ponderis sit æqui rerum æstimatores iudicent, & si quidem omnes, qui in Geometricis mediocriter versati sunt optimè norunt successiuè aliquid vlterius inueniri præter ea, quæ diuini Præceptores Euclides, Archimedes, Apollonius, & Ptolemæus ediderunt, facile enim esse inuentis addere quis ignorat? Nulli vnquam venit in mentem librum Spiralium non ab Archimede, sed ab aliquo alio scriptum fuisse, propterea quod vniuersalius quarumcumque spiralium passiones Neoterici demonstrarunt; Nec quia admirabilis Maurolicus in suo quinto Conicorum libro, & alij recentiores, sicuti præclarus Phylosophus, & Mathematicus Vincentius Viuianus Patritius Florentinus in suo erudito libro de Maximis, & Minimis alia longè diuersa ab Apollonij speculationibus excogitarunt, hos libros adulterinos esse ausi sunt affirmare. Et sicuti ipsemet Midorgius non repudiauit librum primum Conicorum ab Eutocio editum, licet ipse in suo libro tertio melius se demonstrasse propositiones* 52. 53. 54.

libri

libri primi summopere glorietur, pari iure hi libri adulterini censendi non erunt non alia de causa, nisi quia propositiones horum librorum non correspondent, nec assimilantur admirandis cogitationibus in eius sublimi mente repositis. Et sane non dubito, quòd si Midorgius ipse hos libros vidisset, & contrectaßet, omnino illius magni Apollonij esse absq; vlla hæsitatione affirmasset. Nam primi quatuor libri continent easdem propositiones, & sæpe numero eadem verba, quæ in textu Græco Eutocij leguntur: reliqui libri subsequentes docent ea, quæ in epistola ad Eudemum proposuerat se demonstraturum Apollonius, & quæ Pappus, & Eutocius distinctè, & expressè ibidem tractari affirmant. Rursus profunda mentis perspicacia, methodus scribendi, & genius Apollonij adhuc ibidem conspicitur, nec fieri potuit, vt à translatoribus, à Paraphraste, à temporis diuturnitate prorsus deleretur, atque mirandum ingenium Apollonij à tanta barbarie omnino occultaretur. Rursus in confesso est opera Euclidis, Archimedis, Apollonij, Ptolomæi, & aliorum magnorum virorum Arabicè translata fuisse, & expressè grauissimi scriptores Arabi, præcipuè Gregorius Bar-Hebræus lib. 9. Chronicorum ait, opera Apollonij Arabicè translata primò fuisse anno 200. AEgyræ Maumettanæ sub Almen Kalypha à Ioanne Patricida, & postea ab alijs recentioribus. Quare dubitandum non est hos esse veros, atque legitimos tres postremos Conicorum libros Apollonij Pergæi Paraphrasticè ab Abalphatho descriptos.

Fruere modo, mi lector, præclaro, & admirando beneficio Serenissimi Principis Etruriæ, qui regali magnificentia, et liberalitate pretiosissimum hunc thesaurum humanissimè largitur. Vale.

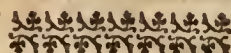
INDEX

INDEX

Propositionum Lib. V. VI. VII. Conic. iuxta seriem numerorum ab Apoll. seruatam, cum Lemmatibus, & Proposition. additis,

Vbi indicantur sectiones, & paginæ, in quibus propositiones reperiri debent.

APOLLONII PERGAEI CONICORVM LIB. V.



DEFINITIONES.

I.



SI à puncto aliquo in axe sectionis conicæ sumpto egrediantur aliquę rectæ lineæ ad sectionem, vocabo punctum illud, ORIGINEM.

II.

Et lineas, RAMOS.

III.

Segmentum autem axis intèr illud, & verticem sectionis ei proximiorem, MENSVRAM.

IV.

Sed si fuerit mensura æqualis semissi erecti, vocabo illam, COMPARATAM.

V.

Et perpendiculares cadentes ab extremitatibus ramorum super axim vocabo, POTENTES illorum ramorum.

VI.

Abscissa verò illarum potentium, ABSCISSA ramorum.

VII.

Et inuersa illarum potentium, INVERSA ramorum.

VIII.

Atque rectangulum contentum sub inclinato, & aggregato inclinati, & erecti, vel differentia transuersi, & erecti vocabo, FIGVRAM COMPARATAM.

IX.

In quolibet rectangulo applicato ad ſegmentum axis, ſi illud ſegmentum ad latitudinem illius rectanguli eandem proportionem habuerit, quam axis ad latitudinem figuræ comparatæ vocabo illud, EXEMPLAR.

X.

Si ex puncto ſuper axim educatur perpendicularis ad vtraſque partes ſectionis, & ex puncto aliquo illius perpendicularis educantur lineæ terminatæ ad ſectionem ex vtraque parte, vocabo punctum illud in perpendiculari ſumptum, CONCVRSVM.

XI.

Et lineas etiam, RAMOS.

XII.

Et qui ſecant menſuram, & terminantur ad ſectionem ex altera parte concurſus, RAMOS SECANTES.

XIII.

At qui non ſecat illam, & tranſit per concurſum, & terminatur ad axim, & ſectionem ſimul, RAMVM TERMINATVM.

XIV.

Sed cuiuſcumque rami ſecantis, cuius portio inter ſectionem, & axim intercepta eſt linea breuiſſima, vocabo illum, BREVISECANTEM.

XV.

Et vocabo ſegmentum axis inter perpendicularem, & verticem ſectionis proximiorem interceptum, MENSVRAM, quoque.

XIV.

Et portionem ſectionis conicæ diſſectam ab ordinatione axis tranſeuntis per originem, ſiuè per concurſum propè verticem proximiorem ſectionis, vocabo, SEGMENTVM illius puncti.

NOTÆ

N O T Æ.

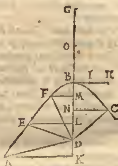
HAE definitiones non sunt Apollonij, sed Interpretis Arabici, qui in proemio huius operis apertè ait, addidisse plurimas definitiones in libris Apollonij, quibus theoremata breuissimè proponi posse profitetur, vt in prioribus quatuor libris videre est. Eas autem exemplis illustrare conabor.



I. Sit qualibet coni sectio A B C; cuius axis B D, & in eo sumatur quodlibet punctum D intrà sectionem, à quo educantur recta linea D A, D E, D F, D C vsque ad sectionem. Tùnc vocatur punctum D, Origo.

II. Et linea D A, D E, & catera vocantur, Rami.

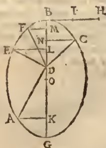
III. Portio verò axis B D intèr originem D, & verticem B interposita vocatur Mensura. Sed in ellipsi A B C G, si axis portiones D B, & D G inaequales fuerint, tantummodò minor portio B D vocatur Mēsura, non autem maior D G.



IV. Sit posteà recta B I semissis lateris recti B H iam si mensura D B aequalis fuerit semirecto B I, vocatur D B, Mensura comparata.

V. At si à terminis ramorum A, E, F C educantur ad axim perpendiculares A K, E L, F M, C N, ipsum secantes in K, L, M, N vocantur illa recta linea Potentes illorum ramorum.

VI. Recta verò K B vocatur Abscissa rami D A, & L B Abscissa rami D E, & sic reliqua omnes.

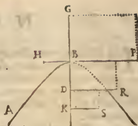


VII. Sit posteà O centrum sectionis, iam axis portio ex centro O vsquè ad potentialem A K educta, scilicet O K vocatur Inuersa rami D A, pariterque O M est Inuersa rami D F.

VIII. Si ponatur recta linea B P ad axim perpendicularis, qua in hyperbola fiat aequalis aggregato, in ellipsi verò fiat aequalis differentia laterum recti B H, & transuersi G B, tunc rectangulum contentum sub G B, & B P vocatur, Figura comparata.

IX. Posteà si, vt G B ad B P ità fiat seg-

mentum axis D B ad D R, & compleatur parallelogrãmum rectãgulum B R, tunc spatium B R vocatur Exemplar. Pari ratione si, vt G B ad D P ità fiat segmentum axis D K ad latitudinem K S, compleaturque parallelogrammum rectangulum D S, vocabitur paritèr D S Exemplar.



X. *Et si C D perpendicularis fuerit ad axim B D, & producatur vltrà axim in E, atquè à puncto E extendantur vsquè ad sectionem rectæ lineæ E B, E F, E G, vocabitur E punctum Concursus.*

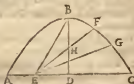
XI. *Et lineæ rectæ E B, E F, E G vocantur etiam Rami.*



VII. *Atquè linea recta E F secans axim in H vocatur Ramus secans.*

XIII. *Et recta linea E B conueniens cum axi in vertice sectionis vocatur Ramus terminatus.*

XIV. *Si verò rami secantis E F portio eius H F inter sectionem, & axim interecpta fuerit breuissima omnium linearum, quæ ex puncto H ad sectionem duci possunt, tunc ramus E F vocabitur Breuisecans. In textu Arabico secans ramus vocabatur, mendosè, vt arbitror, non enim hæc definitio distingueretur à duodecima definitione.*



XV. *Similitèr segmentum axis D B sectum à perpendiculari ad axim ex origine E ducta, vocatur quoquè Mensura.*

XVI. *Tandem si per punctum originis D, vel concursus E ducatur ordinata A C, tunc figura contenta ab ordinata A C, & sectione conica A B C, vocatur Segmentum illius puncti.*

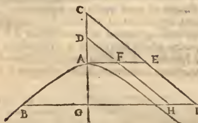
SECTIO

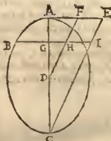
SECTIO PRIMA

Continens propositiones I. II. & III. Apollonij.

PROPOSITIO I.

Si ex centro D sectionis A B (habentis centrum) egrediatur linea recta D F H bifariam diuidens A E erectum illius axis, quod sit perpendiculare super axim C A G, secans axis ordinationem B G I; vtiquè dimidium illius ordinationis, videlicet B G, poterit duplum plani, quod producit illa linea cum axi inter erectum, & illam ordinationem, nempè duplum A G H F.

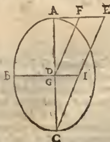




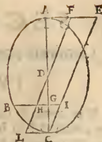
a Quia B G potest comparatum applicatum ad abscissam A G, & pla-
b num G F dimidium est illius comparati; ergò B G poterit duplum plani GF; & hoc erat ostendendum.

PROPOS. II.

Aritèr quoquè ostendetur, si potens transierit per centrum ellipsis, quod BG poterit duplum trianguli AFG.



PROP.



PROPOS. III.

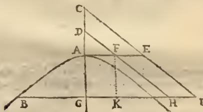
SI verò in ellipsi cadat B G infrà centrum, poterit duplum differentię duorum triangulorum D A F, & D G H, nempè duplum plani G L. Et hoc erat propositum.

Notæ in Propositionem primam.

Vocat in primo libro interpres sectiones habentes centrum hyperbolem, & ellipsim, & vocat erectum latus rectum sectionis, vocat etiam ordinationem axis eam, quam nos ordinatim ad axim applicatam appellamus.

Quia B G potest comparatum applicatum ad abscissam A G, &c. *Vocat insuper parallelogrammum comparatum applicatum ad axis abscissam A G rectangulum ipsum A G I, quod quidem adiacet lateri recto A E latitudinem habens abscissam A G excedens in hyperbola, & deficiens in ellipsi rectangulo simile ei, quod latere recto, & transuerso continetur; scilicèt rectangulo C A E.* a

12. 13. lib. primi.





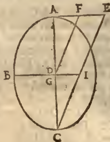
Et planum G F dimidium est illius comparati, &c. *Non erit inutile paulò fusius ostendere id quod ob nimiam facilitatem Apollonius tantummodò innuit. Ducatur recta linea F K parallela axi D A secans ordinatam B G productam in K: quia figuræ latera C A, & A E sunt ipsarum D A, A F dupla; ergo C E, & D F H parallelæ sunt, estque K H parallela A E, cum ambo positæ sint perpendiculares ad axim, & C A, F K sunt quoquè æquidistantes, ergò triangulum F K H simile est triangulo C A E, & propterea parallelogramma rectangula F K H, & C A E similia erunt. Et quoniam quadratum ordinatæ B G æquale est rectangulo contento sub latere recto E A, & abscissa A G excedente* b

Ibidem.

dente

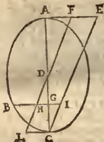
dente in hyperbola, & deficiente in ellipsi rectangulo F K H simile ei, quod lateribus recto, & transuerso continetur, scilicet C A E, & est A F semissis lateris recti, igitur quadratum B G æquale est summæ in hyperbole, & differentia in ellipsi rectanguli G A F bis sumpti, & rectanguli F K H, quod est æquale duplo trianguli F K H: sed quadrilaterum A G H F æquale est aggregato in hyperbola, & differentiæ in ellipsi rectanguli G A F, & trianguli F K H, ergò quadratum B G æquale est duplo quadrilateri A G H F, seu differentia triangulorum D A F, & D G H.

Notæ in Propositionem secundam.



Secunda propositio facilè ex prima deducitur; nam, quando ordinata B G H I transit per centrum D ellipsis; tunc tria puncta G, D, H conueniunt, & triangulum D G H euanescit, & ideò differentia trianguli D A F, & trianguli D G H nullum spatium habentis, erit triangulum ipsum D A F.

Notæ in Propositionem tertiam.



In tertia propositione similitèr, quandò ordinata B H G I cadit infrà centrum D ellipsis, tunc ducta C L parallela ipsi A E, erunt duo triangula D A F, & D C L æqualia inter se, cum sint similia, & latera homologa D A, D C sint æqualia, quia sunt semiaxes; propterea differentia triangulorum D G H, & D A F, seu D C L erit trapezium C G H L, quod subduplum est quadrati ordinatæ B G.

SECTIO SECVNDA

Continens propositiones IV. V. VI. Apollonij.

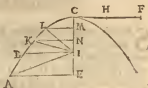
Comparata est minima ramorum egredientium ex sua origine (4) in parabola (5) & hyperbola (6) pariterque in ellipsi (si comparata fuerit portio maioris duorum axium, & tunc maximus est residuum transuersi axis.) Reliquorum verò propinquior

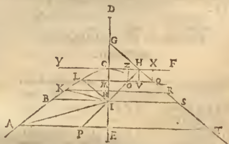
minimo

minimo remotiore minor eſt. Quadratum autem menſuræ minus eſt quadrato cuiuslibet rami aſſignati (4) in parabola quidem quadrato ſuæ abſciſſæ (5) & in hyperbola (6) & ellipſi exemplari applicato ad abſciſſam illius rami.

PROPOSITIO IV.

Sit ſectio A B C, & axis eius C E, & inclinatus, ſiue tranſuerſa D C centrum G, atque erectum C F, & ex C E ſecetur C I æqualis C H (quæ ſit ſemiſſis erecti) & ex puncto originis I educantur rami I B perpendicularis, & I K, I L, I A, & per H, I in hyperbola, & ellipſi ducatur H I P, & per H, G recta H G T, ad quam ex A, B, K, L extendantur A P E T, B I S, K N R, L M O Q perpendiculares ſuper C E. Dico, quod C I, comparata minor eſt, quam I L, & I L, quam I K, & I K, quam I B, & maximus ramorum in ellipſi eſt I D, & quod quadratum menſuræ I C minus eſt quadrato I L, in parabola quidem quadrato C M, & in hyperbola, & ellipſi exemplari applicato ad C M. Quoniam in parabola L M poteſt duplum M C in C H, nempè C I (12. ex primo) & quadratum I L æquale eſt aggregato duorum quadratorum L M, & M I, quadratum itaque L I æquale eſt quadrato M I, & M C in C I bis, quæ ſunt æqualia duobus quadratis C I, M C. Quadratum igitur C I minus eſt quadrato L I quadrato ipſius M C, quæ eſt eius abſciſſa, & pariter oſtendetur, quod quadratum C I minus eſt quadrato I K quadrato N C, & minus quadrato I B quadrato C I, & minus quadrato A I quadrato E C. a



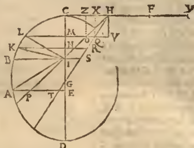


PROPOSITIO V. & VI.

At verò in hyperbola, & ellipſi producantur ex Q, O, H lineæ parallelæ ipſi M C, & quia I C ex hypotheſi æqualis eſt H C, erit I M æqualis M O, quadratum itaque I M duplum eſt trianguli I M O, & quadratum L M duplum eſt trapezij C M Q H (prima ex 5.) ergo quadratum I L a b

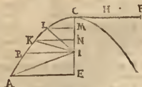
tum IL duplum est trianguli ICH vnà cum duplo trianguli QHO, nempe cum plano rectanguli QZ; sed quadratum IC est duplum trianguli IHC (eò quod CH æqualis est CI) ergo quadratum CI minus est quadrato LI plano rectanguli QZ.

c Deindè ponamus in ellipsi YF æqualem differentiæ, & in hyperbola
d æqualem aggregato DC, CF; ergo propter similitudinem duorum triangulorum GMQ, HVQ, & HVO, MIO, erit HV æqualis VO, & H
e V, vel ei æqualis OV ad VQ est, vt MG ad MQ, nempe vt GC ad HC, seù vt DC ad CF, igi-
f tur VO ad VQ est vt DC ad CF, & comparando summas terminorum ad antecedentes in hyperbola, & differentias eorundem ad antecedentes in ellipsi fiet OQ ad VO (quæ æqualis est O
g Z, nempè MC) vt YF ad YC, & est YC, æqualis DC, & YF æqualis summæ in hyperbola, & differentiæ in ellipsi ipsarum DC, & C
h F; quadratum igitur IC minus est quadrato IL rectangulo QZ, quod est exemplar simile plano rectanguli CD in YF, quæ est figura comparata. Atque sic demonstrabitur, quod quadratum IC minus sit quadrato IK exemplari applicato ad NC, & minus est quadrato BI exemplari applicato ad IC, & minus quadrato AI exemplari applicato ad EC: Estque MC minor, quàm NC, & NC, quam CI, & CI, quàm CE; igitur LI maior est, quàm IC, & IK maior, quàm LI, & IB maior, quàm IK, & IA, quàm IB. Et hoc erat ostendendum. Def.8.9. huius.



Notæ in propositionem quartam.

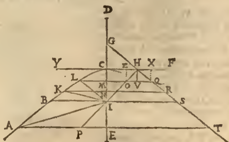
a Quoniam in parabola LM potest duplum MC, &c. *Quadratum enim LM æquale est rectangulo sub abscissa MC, & latere recto CF, estque CH semissis erecti CF; ergo LM potest duplum rectanguli MCH.* 11. Lib.1.

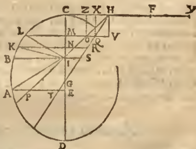


Notæ in propoſitionem quintam.

ERit I M æqualis MO, &c. *Propter parallelas M O, C H, & ſimilitudinem triangulorum I M O, & I C H.* a

Ergo quadratum I L duplum eſt triãguli I C H, &c. *Eo quod quadratum I L æquale eſt duobus quadratis I M, M L in rectangulo triangulo I M L; Quadratis autẽ I M, & L M æqualia ſunt triangulum I M O bis ſumptum cum trapezio C M Q H bis ſumpto; & quia* (1. huius.) *trapezium C M Q H æquale eſt trapezio C M O H, cum triangulo H O Q; at triangulo I M O, & trapezio C M Q H ſimul ſumptis æqualia ſunt triangulum I C H, cum triangulo H O Q. Ergo quadratum L I æquale erit duplo trianguli I C H cum duplo trianguli H O Q.* b





Deindè ponamus in ellipſi Y F æqualem D C, & in hyperbola, &c. *Textus videtur corruptus, quem ſic corrigendum puto. Ponamus Y F in ellipſi æqualem differentiæ, & in hyperbola æqualem aggregato D C, & C F.* c

Propter ſimilitudinem triangulorum, &c. *Sunt enim duæ rectæ lineæ C G, & V H æquidiſtantes, quæ ſecant rectas lineas conuenientes in Q, & O.* d

Erit H V æqualis V O, &c. *Eo quòd M I oſtenſa eſt æqualis M O, eſtque H V ad V O in eadem proportione æqualitatis propter iam dictam ſimilitudinem triangulorum.* e

Igitur V O ad V Q eſt, vt D C ad C F, & conuerſa proportione deindè componendo in hyperbola, & inuertendo in ellipſi fiet in hyperbola Q O ad O V, &c. *Textum corruptum, atque confuſum clariùs exponi poſſe cenſeo per Lemma inferius appoſitum hac ratione. Et comparando ſummas in hyperbola, & differentias terminorum in ellipſi ad antecedentes.* f

Vt Y F ad Y C, & in ellipſi, vt F C ad C F, & Y F in ellipſi æqualis D C, g

DC, quadratum igitur, &c. *Textum corruptum sic corrigendum puto; & est YC aequalis DC, atque YF aequalis summa in hyperbola, & differentia in ellipsi laterum DC, & CF.*

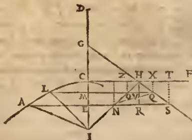
h Exemplar simile plano rectanguli CD in YF in hyperbola, & YC in ellipsi, &c. *Has postrema verba expungenda duxi, tanquam superuacanea.*

Potest etiam ad imitationem Euclidis reperiri multitudo ramorum inter se aequalium, qui ex origine duci possunt in eadem consectione. Itaque quoties mensura fuerit comparata, scilicet aequalis semissi lateris recti, tunc duo tantum rami inter se aequales a puncto originis ad utrasque partes axis duci possunt in qualibet coniesectione, eruntque illi, qui ad terminos L l cuiuslibet ordinatim applicata L l ducuntur ab origine I, nam efficiuntur duo triangula IML, & IMl, qua circa angulos aequales ad M, nempe rectos, habent latera aequalia, scilicet LM, & lM medietates ordinatim applicata, & segmentum axis IM inter ordinatam, & originem est latus commune; ergo bases, seu rami IL, & Il sunt aequales. Reliqui verò rami supra, vel infra terminum eiusdem ordinatim applicata minores, aut maiores sunt ramo ad eius terminum ducto; quare duo tantum rami ad utrasque partes axis inter se aequales duci possunt. PROP. I. Additar.



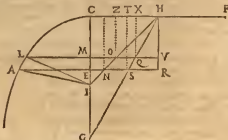
Rursus quadratum rami IA remotioris a comparata superat quadratum rami IL propinquioris (in parabola quidem) rectangulo sub differentia, & sub aggregato abscissarum eorundem ramorum; in reliquis verò sectionibus rectangulo sub differentia abscissarum, & sub recta linea, ad quam summa abscissarum eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti. PROP. II. Add.

Et primò in parabola, quia quadratum IA aequale est quadrato IC cum quadrato abscissae CE; pariterque quadratum IL aequale est quadrato eiusdem IC cum quadrato abscissae CM; ergo excessus quadrati IA supra quadratum IL aequalis est differentia quadratorum EC, & CM; sed excessus quadrati EC supra quadratum MC aequalis est rectangulo, cuius basis aequalis est summa laterum EC, & CM; altitudo verò aequalis est EM differentia laterum eorundem quadratorum (vt deducitur ex elementis) igitur excessus quadrati IA supra quadratum IL aequalis est rectangulo, cuius basis est summa abscissarum EC, CM, altitudo verò EM differentia earundem abscissarum. 4. huius. ibidem.



Secundò in hyperbola, & ellipsi fiat exemplar NT applicatum ab abscissam CE. Et quia quadratum IA aequale est quadrato eiusdem

I C cum exemplari N T, & quadratum I L æquale est quadrato eiusdem I C cum exemplari Q Z. Ergò excessus quadrati I A supra quadratum I L æqualis est differentia exemplarium N T, & Q Z. Posteà ducatur recta Q N: quia triangula Q N S, O N Q æqualia sunt triangulo, cuius basis æqualis est summæ rectarum N S, & O Q, altitudo verò V R, vel M E, suntque illa duo triãgula æqualia trapezio N O Q S siue excessui trianguli N H S, supra triangulum H O Q: ergo triãgulum cuius basis æquatur summæ ipsarum N S, O Q altitudo verò E M, æquale est differentia triãgulorum N H S, O H Q. Et similiter eorum dupla, scilicet rectangulum, cuius basis æqualis est summæ N S, O Q altitudo verò æqualis M E, erit differentia exemplarium rectãgulorum N T, & Q Z; sed summa altitudinum V H, H R, seu summa abscissarum C M, C E ad summam basium N S, O Q eandem proportionem habet, quam vna H V ad vnam O Q, seu quam latus transuersum D C ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi D C, & recti C F: Igitur differentia exemplarium N T, Q Z, seu excessus quadrati I A supra quadratum I L æqualis est rectangulo contento sub E M differentia abscissarum, & sub summa ipsarum N S, & O Q, ad quam summa abscissarum eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti, quod fuerat propositum.



MONITVM.

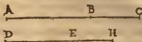
Ex varia dispositione terminorum proportionalitatis scilicet duorum antecedentium, & duorum consequentium consurgunt plures modi argumentandi, quorum aliqui in elementis expositi non sunt, aliqui verò significantissimis vocibus, & breuiùs indicantur in textu Arabico, igitur, ne sepiùs repetatur prolixa expositio modorum argumentandi in proportionalibus, & non proportionalibus, qui cumulatè inseruntur in demonstrationibus Apollonij operæ pretium erit eos semel hic exponere.

LEM-

LEMMA I.

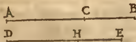
Si quatuor quantitates eandem proportionem habuerint, antecedentes, vel consequentes ad terminorum summas, vel differentias in eadem ratione erunt; & è contra.

Habeat A B ad B C eandem proportionem, quàm D E ad E H: sequitur primò, quod A C ad C B sit, vt D H ad H E; & huiusmodi argumentatio vocatur in elementis compositio terminorum proportionis: itaque summa antecedentium, & consequentium ad easdem consequentes sunt etiam proportionales: si verò ex eadem hypothesi concludatur, quod A C ad A B, sit vt D H ad D E, vt nimirum summa terminorum proportionis ad antecedentes sint proportionales: quod quidem manifestum est; nam posita fuit A B ad B C, vt D E ad E H; erit inuertendo C B ad B A, vt H E ad E D, & componendo C A ad A B erit vt H D ad D E: modo huiusmodi argumentandi forma innominata est; potest autem breuitatis gratia appellari, Per comparationem summæ terminorum ad antecedentes.



Secundò concludi potest, quod A B ad A C sit vt D E ad D H; quia, vt in prima parte dictum est, A C ad A B erat vt D H ad D E, ergo inuertendo A B ad A C erit vt D E ad D H: hæc argumentandi forma vocari potest, Per comparationem antecedentium ad terminorum summas.

Tertiò concludi potest: quod B C ad C A, sit vt E H ad H D; nam componendo A C ad C B, erat vt D H ad H E, quare inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D, & hæc argumentatio fieri dicetur comparando consequentes ad terminorum summas.



Deindè sint eadem quatuor proportionales in secunda figura, nimirum totum A B ad segmentum eius B C sit vt totum D E ad portionem eius E H; tunc residuum A C ad C B erit, vt residuum D H ad H E; hæc argumentatio fieri dicitur in elementis, diuidendo terminos proportionis, estque comparatio differentiarum terminorum ad consequentes.

At si concludatur ex eadem hypothesi quod A B ad A C sit vt D E ad D H; hæc argumentatio in elementis fieri dicitur per conuersionem rationis estque comparatio antecedentium ad differentias terminorum.

Postea ex eadem hypothesi sequitur quod A C ad A B sit vt D H ad D E: quia per conuersionem rationis, seu referendo antecedentes ad differentias terminorum est A B ad A C, vt D E ad D H; ergo inuertendo A C ad A B erit vt D H ad D E, & hæc argumentatio innominata fiet comparando differentias terminorum ad antecedentes.

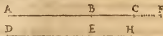
Tandem

Tandem ex eadem hypothesi sequitur, quod C B ad C A sit vt E H ad H D: nam diuidendo est vt A C ad C B, ita D H ad H E; ergo inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D: & hæc argumentatio innominata fieri dicetur comparando consequentes ad derenifstias terminorum.

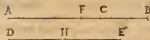
LEMMA II.

Si prima A B ad secundam B C maiorem proportionem habuerit quàm tertia D E ad quartam E H: comparando antecedentes ad terminorum summas habebit A B ad A C maiorem proportionem quàm D E ad D H.

Lem.1. *Fiat A B ad B F, vt D E ad E H; erit B F maior quàm B C, atque A F maior quàm A C; ergo A B ad A F eandem proportionem habebit quàm D E ad D H, sed eadem A B ad minorem A C maiorem proportionem habet quàm ad A F maiorem, ergo A B ad A C maiorem proportionem habet quàm D E ad D H.*



Secundò iisdem positis, dico comparando terminorum summas ad antecedētes A C ad A B habere minorem proportionem quàm D H ad D E. Quoniam ex præcedenti casu A B ad A C maiorem proportionem habebat quàm D E ad D H; igitur inuertendo C A ad A B minorem proportionem habebit quàm D H ad D E.



Tertiò, dico quod comparando consequentes ad terminorum summas B C ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D; quia (ex hypothesi) A B ad B C maiorem proportionem habet quàm D E ad E H componendo A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E, & inuertendo B C ad C A minorem proportionem habebit, quàm E H ad H D.

Quartò, iisdem positis in quarta figura, dico quod comparando differentias terminorum ad consequentes A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E: quia ex constructione A B ad B F est, vt D E ad E H, diuidendo A F ad F B erit vt D H ad H E; sed A C maior est quàm A F, & C B minor, quàm F B; igitur A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm A F ad F B; & propterea A C ad C B maiorem proportionem habebit, quàm D H ad H E.

Quintò, dico quod è contra, comparando consequentes ad differentias terminorum C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D. Quia (ex præcedenti casu) A C ad C B maiorem proportionem habebat quàm D H ad H E; ergo inuertendo C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D.

Ibidem. *Sextò, dico quod comparando antecedentes ad differentias terminorum B A ad A C minorem proportionem habebit quàm E D ad D H. Quia ex constructione*

A B ad

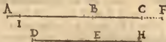
AB ad BF est, vt DE ad EH; ergo AB ad AF est, vt ED ad DH; sed BA ad maiorem CA habet minorem proportionem quàm ad FA; igitur BA ad AC minorem proportionem habet quàm ED ad DH.

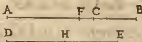
Septimò, dico è contra, quod comparando differentias terminorum ad antecedentes CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE. Quoniam, ex praecedenti casu, BA ad AC minorem proportionem habebat quàm ED ad DH; igitur inuertendo CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE.

LEMMA III.

Si quatuor quantitates eandem rationem habuerint homologorum summae, vel differentiae in eadem ratione erunt.

Ostensum enim fuit in elementis, quod proportionalium omnes anteecedentes ad omnes consequentes eandem proportionem habent, quàm vna antecedentium ad vnam consequentium. Similiter ostensum fuit, quod si totum ad totum eandem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquũ, vt totum ad totum se habebit; sed vno verbo homologorum summa, vel differentiae in eadem ratione erunt iuxtà Arabici expositoris compendium.





LEMMA IV.

Si prima AB ad secundam DE maiorem proportionem habuerit, quàm tertia BC ad qnartam EH: dico, quod comparando homologorum summas AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm prima cum tertia, idest AC ad secundam cum quarta, idest DH.

Fiat BF ad EH, vt AB ad DE: ergo AB ad DE est, vt AF ad DH; sed AF maior est quàm AC, igitur AF ad eandem DH maiorem proportionem habet, quàm AC: & ideo AB ad DE maiorem proportionem habet, quàm AC ad DH. Lem. 3.

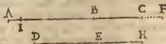
Secundò ijsdem positis, dico, quod tertia BC ad quartam EH minorem proportionem habet quàm AC ad DH.

Fiat vt BC ad EH, ita IB ad DE, ergo CB ad EH est, vt CI ad HD; sed AB maior est quàm IB, & ideo CA maior quàm CI; igitur IC ad eandem Ibidem.

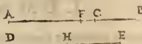
DH

D H minorem proportionem habet quàm A C, & propterea B C ad E H minorem proportionem habebit quàm A C ad D H.

Tertiò ijsdem positis in sexta figura, dico quod comparando homologorum differentias prima A B ad secundam D E minorem proportionem habet quàm differentia A C ad differentiam D H.



Lem.3. *Fiat B F ad E H, vt A B ad D E, ergo A F ad D H est vt A B ad D E, sed A F minor est quam A C, ergo A F ad eandem D H minorem proportionem habet quàm A C: & propterea A B ad D E minorem proportionem habet quàm A C ad D H.*



Ibidem. *Quartò, dico, quod tertia C B ad quartam H E minorem proportionem habet quàm differentia A C ad differentiam D H. Quoniam ex constructione A B ad D E est vt F B ad H E, erit F B ad H E, vt A F ad D H; sed C B minor est quàm F B, atque A C maior quàm A F, & A F ad eandem D H minorem proportionem habet quàm A C; igitur C B ad H E eo magis habebit minorem proportionem quàm A C ad D H quæ erant ostendenda.*

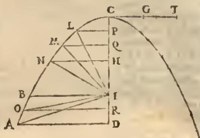
SECTIO TERTIA

Continens VIII. IX. X. Propos. Apollonij.

SI mensura fuerit maior comparata, dummodo in ellipsi minor sit medietate axis transuersi, tunc minimus ramorum in sectionibus est, cuius potentialis abscindit à mensura versus originem in parabola (8) lineam æqualem comparatæ, in hyperbola verò (9) & in ellipsi (10.) lineam, cuius inuersæ proportio ad illam est, vt proportio figuræ; & reliqui rami, quo accedunt ad minimum sunt minores remotioribus; & quadratum minimæ minus est quadrato cuiuslibet rami assignati in parabola quidem (8) quadrato excessus suarum abscissarum, & in hyperbola (9) & ellipsi (10.) exemplari applicato ad excessum suarum inuersarum. a

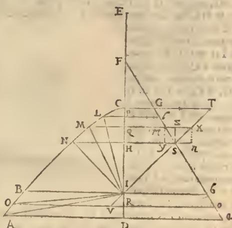
SIt itaque sectio A B C, & mensura I C, inclinatus, siue transuersa E C, dimidium erecti C G, centrum F, origo I, & I H in parabola sit æqualis C G, & in hyperbola, & ellipsi F H ad H I sit, vt F C dimidium inclinati, seu transuersæ ad C G, dimidium erecti, & educta ex H perpendiculari H N, & coniuncta recta N I; Dico N I minimum esse ramorum egredien- b

egredientium ex I, & insuper, propinquiores illi minores esse remotioribus ramis ex vtraque parte, & quod quadratum I N minus est quadrato M I (exempli gratia) in parabola quadrato QH, in hyperbola, & ellipsi
c exemplari applicato ad QH. Quoniam quadratum HN in parabola ęquale est HI, nempe CG in HC bis (11. ex primo) erit quadratum IN ęquale IH in HC bis cum quadrato HI; at quadratum MQ æquale est HI in QC bis (11. ex primo) igitur quadratum MI ęquale est IH in QC bis cum
d quadrato IQ; hoc autem est ęquale duobus quadratis IH, HQ, & IH in HQ bis; igitur quadratum IM æquale est IH in HC bis cum quadrato IH, quę sunt æqualia quadrato NI vnà cum quadrato HQ. Quadratum igitur MI excedit quadratum NI quadrato HQ. Et constat quoque, quadratum IL excedere quadratum IN quadrato PH; atque PH maior est, quàm QH, ergo IL maior est, quàm IM, & IM, quàm NI. Ponamus iam BI perpendicularem super CI, ergo quadratum BI ęquale est IC
e in IH bis (11. ex primo); quadratum igitur IN minus est
f quàm quadratum BI quadrato IH. Et quia quadratum OR ęquale est CR in IH bis excedet quadratum IN (quod est ęquale quadrato IH, & IH in HC bis) duobus quadratis HI, IR, & IH in IR bis, nempè quadrato RH; atquè sic constat, quadratum AI excedere quadratum IN quadrato DH; estque DH maior, quàm RH, igitur IA maior est, quàm IO, & IO quàm IN. Et hoc propositum fuerat.





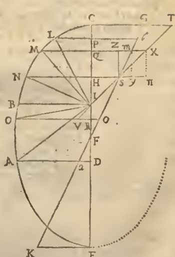
PROPOSITIO IX. & X.



AT in hyperbola (10.) & ellipsi educamus rectas lineas, G F quidem secātem A D in *a*, & N H occurrētem F G in S, & I S secantem C G in T, pariterque M Q secantem F G in *m*, & I T in X, & ex punctis *m*, S, *x* educamus inter N S, M X rectas *m y*, X *n*, S Z parallelas ipsi C I. Et quia C F ad C G, nempe F H ad H S posita est, vt F H ad H I erit H I æqualis H S; quadratum igitur I H est æquale duplo trianguli I H S, & quadratum N H ęquale est duplo trapezij H G; quare quadratum N I æquale est duplo trapezij I G; similiter quadratum I Q ęquale est duplo trianguli I Q X, & quadratum M Q est æquale duplo trapezij Q G; itaque quadratum ex I M æquale est duplo trapezij I G cum duplo trianguli *m* S X, quod est æquale plano *m n*: Et C F ad C G, nempe proportio figuræ est, vt S Z, nempe Z X ad Z *m* (& hoc quidem propter similitudinem triangulorū) quare comparādo priores ad summas terminorum in hyperbola, & ad eorundem differentias in ellipsi fiet X Z (quæ est æqualis ipsi X *n*) ad X *m*, vt proportio inclinati, siue transuersæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* est exemplar, estque applicatum ad X *n*, nempe

g h i k l

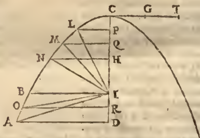
Prop. 1. h. — Lem. 1. h. — Def. 9.



nempe ad QH. Eodem modo constat, quod quadratum IL excedit quadratum I N quantitate exemplaris applicati ad H P, & quod quadratum B I excedit quadratum IN exemplari applicato ad IH, & quod quadra-
m tum I O excedit quadratum I N exemplari applicato ad R H (eo quod quadratum R I æquale est duplo trianguli R V I, & quadratum O R æquale est duplo trapezij R G, at in ellipsi quando O R cadit infra centrum F Prop.1. h.
æquale est duplo trapezij R K; quadratum igitur O I in ellipsi æquale est Prop.3. h.
n duplo trianguli K E F, quod est æquale F C G cum duplo trapezij V F, igitur quadratum O I in hyperbola, & ellipsi excedit duplum trapezij I G (quod est æquale quadrato N I) duplo trianguli V S o, quod est æquale
o exemplari applicato ad R H: & similiter patet, quod quadratum A I excedit quadratum N I exemplari applicato ad D H, estque D H maior quàm R H, & R H maior quàm I H; quare A I maior est, quàm O I, &
p O I maior, quàm B I, & B I, quàm N I, & quodlibet horum duorum excedit N I potestate plano iam dicto, & hoc erat ostendendum.

Notæ in Propositionem VIII.

a SI mensura fuerit maior comparata, dummodò in ellipsi sit portio transuersæ, non maior medietate ipsius, tunc minimus, &c. *Sic puto legendum: Si mensura fuerit maior comparata, dummodo in ellipsi minor sit medietate axis transuersi, tunc minimus, &c. Nam si mensura sumi posset æqualis semitransuerso, tunc quidem origo esset in centro ellipsis, quare undecima propositio huius esset superflua, in qua supponitur origo in ipsomet centro ellipsis. Animaduertendum est quod in hac propositione mensura necessariò sumi debet in axe maiori ellipsis; quandoquidem mensura I C ponitur maior, quàm C G, & C F maior quàm C I, ergo C F maior est quàm C G, & illius duplum scilicet axis*

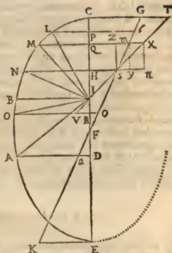


E C maior erit duplo huius, sed vt E C ad duplum C G, ita est quadratum E C ad quadratum Recti axis eiusdem ellipsis: ergo E C est maior duorum axium ellipsis A B C.

b Et educta ex H perpendiculari H N, &c. *Idest ex H educta H N perpendiculari ad axim C I, quæ secet sectionem in N, & iuncta recta N I, pariterque ductis reliquis ramis I M, I L, I B, I A, atque ab eorum terminis ad axim extensis perpendicularibus, vt in propositionibus quarta, quinta, sexta factum est.*

c Quadratum H N in parabola æquale est H I nempè C G in H C bis (prima ex quinto) &c. *Hoc deduci non potest ex prima propositione huius libri,*

sed potius ex vndecima libri primi; est enim quadratum H N aquale rectangulo contento sub abscissa H C, & sub latere recto, estque rectangulum sub H C, & sub semirecto C G semissis illius; igitur quadratum H N aquale est duplo rectanguli H C G.



d

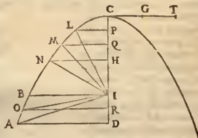
Hoc autem est æquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis, &c. *Post hac verba subiungo claritatis gratia, atque C H in H I bis aquale est duplo C Q in H I vna cum duplo Q H in H I.*

e

Ergo quadratum B I æquale est I C in I H bis, &c. *Hic pariter, vt clarior reddatur demõstratio, subiungo, scilicet duplo rectãguli C H I vna cum duplo quadrati H I; erat autem quadratum N I aquale duplo rectanguli C H I, & vnico quadrato H I, ergo, &c.*

f

Et quia quadratum O R æquale est C R in I H bis, &c. *Subiungo hanc declarationem. Scilicet duplo rectanguli C H I, & duplo quadrati H I cum duplo rectanguli R I H. Quare quadratum I O aquale est quadrato R I, duplo quadrati H I, duplo rectanguli R I H, & duplo rectanguli C H I: sed quadratũ H R aquale est quadrato R I, quadrato I H cum duplo rectanguli R I H. Ergo quadratum I O aquale est quadrato H R, quadrato H I cum duplo rectanguli C H I; erat autem prius quadratum I N aquale quadrato I H cum duplo rectanguli C H I. Igitur excessus quadrati I O supra quadratum I N est quadratum H R.*

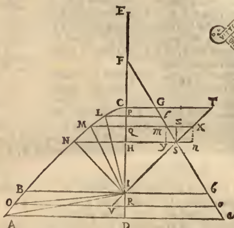


Notæ

Notæ in Propoſitionem IX. & X.



g A T in hyperbola, & ellipſi educamus G F ad *a* ex A D, & H N ad *s* ex F G, & I S ad T ex C G, ſi educta occurrat ſectioni ad A, & M Q poſita ad *m* ex *a*, F G, & X in I T, & ex *m*, S X, *my*, *xn*, S Z inter N S, M X, &c. *Eadē phraſi inconcinna exponitur vniuerſa conſtructio huius propoſitionis, ideo curaui eam reddere clariorem, dicendo;*



Educamus rectas lineas G F quidem ſecantem A D in a, &c.

h Quadratum igitur I H eſt æquale triangulo I H S, &c. *Quia nimirum. Quadratum I H eſt aquale duplo iſoſcelei, & rectanguli trianguli I H S.*

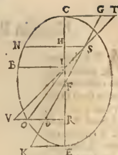
i Et ſimiliter quadratum I Q æquale eſt duplo trianguli I Q X, &c. *Scilicet duplo trapezij I S m Q cum duplo trianguli S m X.*

k Et hoc quidem propter ſimilitudinem triangulorum, at componendo proportionem in hyperbola, tum inuertendo, & reflectendo in ellipſi fit, &c. *Huiuſmodi verba inepta ad concluſionem inferendam commutaui dicendo; Quare comparando priores ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad eorum differentias in ellipſi fit, &c. Quæ quidem expeditè (vt in primo præcedentium Lemmatum oſtenſum eſt) progreſſum declarant.*

l Vt proportio inclinati, ſiue tranſuerſæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* eſt exemplar, &c. *Subiungo: nam, vt dictum eſt in quinta, & ſexta huius, poteſt hic demonſtrari, quod figura m n ſimilis eſt ei, quæ continetur latere tranſuerſo E C, & ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti iuxta definitiones octauam, & nonam.*

m Quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R in hyperbola æquale eſt duplo trapezij R G, & in ellipſi æquale eſt duplo trapezij R K, &c. *Legendum puto quadratum R I aquale eſt duplo trianguli* 1. huius. *R V I, & quadratum O R aquale eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F aquale eſt duplo trapezij R K, &c. Deindè quum triangulum R V I ſimile ſit triangulo I H S propter parallelas V R, S H; ideò triangulum R V I erit quoque iſoſcelem, & rectangulum. Poſtea quadratum*

Prop. 1. h. *dratum O R æquale est duplo trapezij R C G O; Sed in ellipsi quando ordinata O R cadit infra centrum F, tunc quidem ducta E K parallela CG, quæ secet G F in K, erit quadratum O R æquale duplo differentiæ triangulorum F R o, & F C G, seu F E K, quæ differentia æqualis est trapezio R E K o, ideoque duo quadrata ex I R, & ex R O, idest quadratum ex I O æquale erit triangulis F C G, & I R V bis sumptis dempto duplo trianguli F R o.*



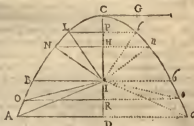
Quod est æquale triangulo F C G cum duplo trapezij V F, &c. *Addo, quæ videntur in textu deficere, seu cum duplo differentia triangulorum I V R, & F R o. In hyperbola verò quadratum O I æquale est spatio rectilineo V I C G o bis sumpto, quare in hyperbola, & ellipsi quadratũ O I æquale est duplo trapezij I C G S cum duplo triãguli V o S.*

Quod est æquale exemplari applicato ad R H, &c. *Hoc enim constat ex ijs, quæ supra dicta sunt.*

Estque D H maior in hyperbola, quàm R H, itaque A I maior, quàm O I, & O I in omnibus maior, quàm B I, &c. *Textum hunc corruptum sic restituo: Estque D H maior, quàm R H, & R H maior quàm I H; itaque A I maior est, quàm O I, & O I maior quàm B I.*

Similiter, vt in præcedenti sectione factum est, reperietur multitudo ramorum inter se æqualium, qui ex origine ad sectionem duci possunt. Existente
PROP. III. Add. *mensura I C maiore, quàm comparata, si differentia abscissarum rami maioris, & breuissimi æqualis fuerit abscissa rami breuissimi, erunt tantummodo tres rami inter se æquales; si verò maior fuerit, duo rami solummodo æquales erunt; at si fuerit minor eadem abscissa, erunt quatuor rami tantùm æquales inter se.*

Et primò ramorum I O, & breuissimi I N abscissæ sint R C, H C, & eorum differentia R H, sitque R H æqualis H C, & producatur O R perpendicularis ad axim quousque secet sectionem ex altera parte in puncto o, coniungaturque ramus I o. Dico quod tres rami I O, I o, I C tantũmodo inter se æquales sunt; quoniam quadrata in para-



8. huius. 9. 10. h. *bola rectarum R H, & H C, seu in hyperbola, & ellipsi, rectangula exemplaria inter se similia applicata ad R H, & H C æqualia sunt inter se, cum eorum latera homologa R H, H C æqualia supposita sint; estque excessus quadrati rami I O, vel I o, seu I C supra quadratum rami breuissimi I N æqualis quadrato R H, vel C H in parabola, & in reliquis sectionibus, exemplaribus similibus applicatis ad easdem rectas æquales R H, H C;*

H C; igitur prædicti excessus tam in parabola, quàm in reliquis sectionibus æquales sunt inter se, & ideò quadrata ramorum I O, I o, I C, & rami ipsi æquales erunt: cumque quilibet alius ramus supra, vel infra ramum I O maior, vel minor sit illo, non erunt plures, quam tres rami inter se æquales.

Secundò H D differentia abscissarum rami I A, & breuissimi I N supponatur maior, quàm H C quæ est abscissa breuissimi rami I N; & producta similiter ordinata D A vltra axim ad sectionem in a, & coniuncta I a; Dico, quod duo rami tantummodo I A, & I a inter se æquales sunt: Quia H D maior est, quàm H C, erit quadratum ex H D maius quadrato H C; pariterque exemplar applicatum ad H D maius erit exemplari ei simili applicato ad H C, & ideo tam quadratum I A, quàm I a maius erit quadrato I C, cum quodlibet illorum maiori excessu superet quadratum breuissimi rami I N quam quadratum I C, quare tam ramus I A, quàm I a (qui æquales sunt) maiores erunt, quàm I C, & ideo maiores quàm intercepti inter I C, & I N, pariterque maiores, quàm interpositi inter I N, & I A, & minores omnibus alijs, qui infra ipsos cadunt. Quapropter duo tantùm rami I A, I a ab origine ad sectionem duci possunt inter se æquales.

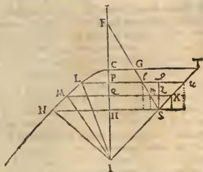
Tertiò sint duæ abscissarum differentiæ H P, & H I æquales inter se, & quælibet earum minor H C abscissa rami breuissimi, & producantur perpendiculares ad axim L P, B I, donec conueniant ex altera parte cum sectione in l, & b, coniunganturque rami ad l, b. Dico, quatuor ramos I B, I L, I l, I b æquales inter se tantummodo duci posse; quia, vt dictum est, quilibet eorum superat ramum breuissimum I N potentia eodem excessu, erunt radij ipsi I B, I L, I l, I b æquales inter se, reliqui verò supra, & infra ipsos maiores, aut minores erunt, & ideo non possunt duci plures, quàm quatuor rami iam dicti æquales. Quod erat ostendendum.

Et insuper quadratum rami à breuissimo remotioris superat quadratum rami propinquioris, in parabola quidem rectangulo sub excessu, & sub aggregato differẽtiali suarum abscissarum ab abscissa rami breuissimi, in reliquis verò sectionibus rectãgulo sub eodem excessu differentiali, & sub recta linea, ad quam summa differentialis eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum recti, & transuersi. PROP. IV. Add.

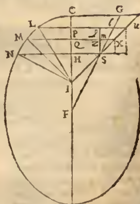
Quoniam in parabola quadratum I L superat quadratum I M eodem excessu, quo quadratum H P superat quadratum H Q (cum quadratum H P, atque quadratum I N simul sumpta æqualia sint quadrato L I, & quadrata ex H Q, & ex I N æqualia sint quadrato I M) sed excessus quadrati H P supra quadratum H Q æqualis est rectangulo sub P Q differentia, & P H, H Q, summa laterum eorundem quadratorum contento; igitur quadratum I L superat quadratum rami I M propinquioris breuissimo I N rectangulo sub P Q excessu, & P H Q Ex 8. hu.

aggregato

aggregato differentiali abscissarum ramorum I L, I M ab abscissa rami breuissimi.



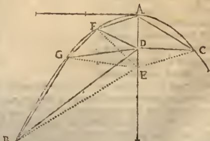
Pari modo in hyperbola, & ellipsi quadratum I L superat quadratum I M eodẽ
Ex 9.10.h. *excessu, quo exemplar applicatum ad H P superat exemplar applicatum ad H Q; sed differentia exemplarium applicatorum ad H P, & H Q aequalis est rectangulo sub P Q excessu differentiali, & recta linea composita ex X m, & u l, ad quam summa differentialis P H Q eandem proportionem habet, quam latus trãsuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti, ut in nota propositionis 5. ostensum est; igitur quadratum I L superat quadratum I M iam dicto rectangulo sub P Q, & sub X m, & u l, quod erat ostendendum.*



SECTIO IV.

Continens Proposit. VII. & XII. Apollonij.

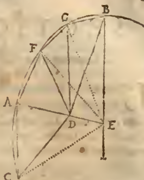
SI fuerit mensura A D minor comparata A E, (12.) aut sit pars lineæ breuissimæ, & axis in ellipsi sit maior, erit A D breuissimus ramorum egredientium ex origine eius in omnibus sectionibus, ut sunt F D, G D, B D, C D, & proximior illi minor est remotiore, nempe F D quam G D, & G D, quàm B D.



a

Quia

b QVia A E est linea breuissima, igitur F E maior est illa; itaque angulus F A E maior est, quàm c A F E; Ergo ille est multò maior quàm A F D, quare F D maior est; atque sic d patet quod G E maior sit quàm E F, & ideo angulus G F E maior est, quàm E G F; igitur angulus G F D multò maior est, quàm F G D, & propterea G D maior est, quàm D F, & similiter B D, quàm G D, & D C, quàm A D, & hoc erat propositum.



NOTÆ.

a SI fuerit mensura A D minor comparata A E, &c. *Sensus propositionis clarior sic reddetur; Si fuerit mensura A D minor comparata A E, qua in ellipsi sumi debet in axi maiori eius (12.) aut sit pars lineæ breuissimæ; erit A D minimus ramorum F D, G D, B D, C D, egredientium ex origine eius in omnibus sectionibus, & proximior illi, &c.*

b Quia A E est linea breuissima, igitur, &c. *Vt constructio compleatur subiungo: Igitur si coniungantur rectæ lineæ E F, E G, E C, E B, & rectæ lineæ A F, F G, G B, A C erit F E maior, quàm A E.*

c Ergo hic est multò maior, quàm A F E, &c. *Sensus clarior reddetur hac ratione: Ergo angulus F A E multò maior erit, quàm A F D, qui est portio minoris anguli, quarè F D subtendens angulum maiorem est maior, quàm A D.*

d Igitur ipse multò maior est, &c. *Superaddo rationem illationis dicendo; Et propterea angulus G F D maiorem excedens erit multò maior, quàm F G D, qui portio minoris est.*

Manifestum est in prima figura propositionis 7. quando A D est portio axis minor comparata, quod tunc ex origine D duo tantummodo rami inter se æquales ad vtrasque partes axis duci possunt ad sectionem, & erunt illi, qui ad terminos eiusdem ordinatim ad axim applicatæ iunguntur ab origine D, vt constat ex superiùs dictis.

At in secunda figura propositionis 12. possunt quidem ab origine D ad sectionem duci hinc indè à breuissima D A, aliquando duo tantùm rami inter se æquales, aliquando tres, atque etiam quatuor inter se æquales, quæ cognitio pendet ex propositione 72. huius libri.

SECTIO QVINTA

Continens XI. Proposit. Apollonij.

Linearum egredientium ex D centro ellipsis A B C, breuissima est semiaxis minor rectus illius, qui sit B D, maxima verò est semiaxis transuersus, qui sit A D, & propinquiores maiori sunt maiores remotioribus, vt H D, quam G D, & quadratum cuiuslibet rami, vt G
D (exempli gratia) excedit quadra- a
tum breuissimę B D exemplari applicato ad inuersam illius I D.

Educamus itaque E A æqualem A D, & abscindamus ex illa A F æqua- b
lem dimidio erecti, & iungamus D F, D E, & perducamus ex G, H
perpendiculares ad D A, & sint G I M, H L N. Quia quadratum G I æ- c
quale est duplo trapezij I F (prima ex quinto) & quadratum I D est æqua-
le duplo trianguli I D M, eo quod I D est æqualis I M, erit quadratum d
D G æquale duplo trianguli A D F (quod est æquale quadrato B D (2. ex
quinto) vnà cum duplo trianguli Q M D, quod est æquale rectangulo Q
P; igitur quadrati G D excessus supra quadratum B D est æqualis plano
Q P, & quia D A, nempe E A ad A F est, vt D I, nempe M I ad I Q, e
& per conuersionem rationis A E ad E F, scilicet dimidium transuersæ
ad illius excessum super A F dimidium erecti, est, vt M I, nempe M P
Def 8. 9. huius. ad M Q; igitur planum Q P simile est figuræ comparatæ, & M P æqua-
lis est D I. Similiter patet, quod quadratum D H excedit quadratum B
D exemplari applicato ad D L, & quadratum D A superat quadratum
B D exemplari applicato ad D A: Est verò D I minor, quàm D L, &
D L, quàm D A; igitur B D (quæ est dimidium recti) minor est, quàm f
G D, & G D, quàm D H, & D H quàm D A, quod erat ostendendum.

NOTÆ.

Et debet esse linea breuissima perpendicularis ad mensuram, nempe B a
D perpendicularis D A, &c. *Hæc omnino expungi debent, tanquam superuacanea, axes enim esse nequeunt, nisi ad inuicem perpendiculares sint; quare censeo ab aliquo verba illa addita textui Apollonij fuisse.*

Edu-

b Educamus itaque E A, &c. *Lego: Educamus itaq; E A perpendicularem, & æqualem A D.*

c Et perducamus ex G, H perpendiculares, &c. *Et perducamus ex G, H perpendiculares ad D A, & sint H L N, & G I M, quæ secent F D in Q, & D E in M, & N, atque à punctis Q, M educantur M P, Q O, parallelæ D A, quæ secent rectum axem B D in O, P. Addidi hæc postrema verba, vt constructio completa sit.*

d Eo quod I D est æqualis I M, &c. *Quoniam sicuti in triangulo D A E simili triangulo D I M (propter angulum D communem, & rectos angulos ad I, & A) latus D A æquale erat E A, ita latus D I æquale est I M.*

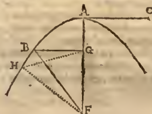
e Nempe M I ad I Q, & è contra, &c. *Lego: Nempe M I ad I Q, & per conuersionem rationis.*

f Cumque B D sit dimidium axis recti erit perpendicularis ad A D mensuram, &c. *Hac verba postrema pariter expungi debent, nisi fortè corollarium propositionis exponunt, & tunc textus sic restitui deberet. Ex dictis constat, lineam breuissimam è centro ellipsis ad sectionem ductam, perpendicularem esse ad axim eius maiorem.*

Manifestum est ex centro ellipsis ad sectionem duci non posse plures, quàm quatuor ramos inter se æquales, neque pauciores duobus; tres autem nequaquam; nam duæ medietates cuiuslibet axis æquales sunt inter se, & quatuor rami ad extremitates duarum applicatarum ad axim æqualiter è centro distantium ducti æquales sunt inter se.

SECTIO SEXTA

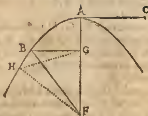
Continens Proposit. XIII. XIV. XV. Apollonij.



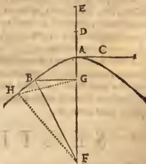
Ostendamus modò cõuersum harum propositionum; & est, quod linea breuissima B F continet cum sua mensura A F angulum acutum, vt B F A in omnibus sectionibus, & ellipsi (si tamen non egrediatur ex eius centro) eiusque potentialis abscindet

a mensuram (13) in parabola æqualem comparatæ (14) & in hyperbola (15) & ellipsi lineam, ad quam inuersa est, vt proportio figuræ.

Sit centrum D, & dimidium erecti A C. Quia B F est linea breuissima, erit A F maior quàm A C, eo quòd si esset æqualis (4. 6. ex quinto)

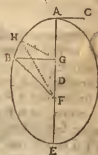


aut minor illa (7. ex quinto) esset linea breuissima A F, aut pars illius, quod est falsum; igitur maior est, quàm A C; & propterea A D ad A C maiorem proportionem habet, quàm ad A F; ponamus ergo, vt A D ad A C, ita D G ad G F in hyperbola, & ellipsi; at in parabola ponamus G F æqualem A C, & b ducatur ex G perpendicularis ad sectionem. Dico, quod ei occurret ad B. Nam si occurrat sectioni ad aliud punctum, vt H coniuncta H F erit H F breuissima (8. 9. 10. ex quinto) sed supposuimus B F esse breuissimam, quod est absurdum, ergo perpendicularis occurrit sectioni in B. Et quia angulus B G F est rectus, erit angulus B F G acutus, quod erat ostendendum.



NOTÆ.

a Et eius potentialis secet mensuram in parabola, &c. *Idest, & eius potentialis abscindet ex mensura vsque ad originem, in parabola quidem segmentum æquale comparatæ, & in hyperbola, & ellipsi lineam, ad quam inuersa eandem proporportionem habet, quam latus transuersum ad rectum.*



b Et ducatur ex G perpendicularis ad sectionem, &c. *Et ducatur ex G recta linea perpendicularis ad axim, & producatur vsque ad sectionem.*

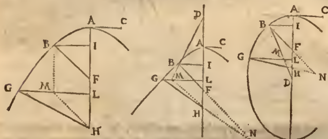
SECTIO

SECTIO SEPTIMA

Continens XXVI. XXVII. XXVIII. Propos. Apollonij.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

Angulorum ab axi sectionis A H, & à lineis breuissimis F B, H G contentorum proximiores vertici sectionis minores sunt remotioribus, nempe angulus A F B minor est A H G.



Sit itaque centrum D, & semi inclinatus axis A D, siue semitransuersus, & dimidium erecti A C: educamus itaque duas perpendiculares
a GL, BI, & si sectio fuerit parabole, erit FI æqualis LH, quia quælibet
b earum æqualis est A C (13. ex quinto) & L G maior est, quàm BI; angulus igitur F minor quàm H; si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis,
c erit FI ad ID, vt HL ad LD, quia quælibet earum est, vt A C ad A D
d (14. 15. ex quinto) & permutando, erit I D ad L D nempe B I ad M L, vt I F ad L H, & anguli I, & L sunt recti; igitur duo triangula B I F, M L H sunt similia, ideoque angulus A H G maior est, quàm angulus A F B, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO XXVIII.

Hinc patet, lineas breuissimas sibi occurrere ad partes axis sectionis.

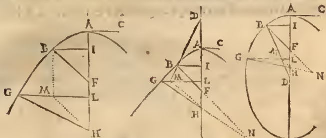
Quia angulus A F B minor est, quàm angulus A H G; quare sibi occurrunt ad partes F, H, & hoc erat ostendendum. 26. 27. h.

NOTÆ

NOTÆ.

EDucamus itaque duas perpendiculares, &c. *Educamus itaque ex punctis B, G duas G L, B I perpendiculares ad axim ei occurrentes in L, I.* a

Et L G maior est, quàm B I, &c. *Subiungo: Eo quod potentialis G L magis recedit à vertice, quàm B I; si iam ducatur B M parallela axi in parabola, & ex centro educta in reliquis sectionibus, secans G L in M, coniungaturque H M, erit in parabola M L minor quàm G L, & æqualis B I, & ideo angulus M H L minor erit angulo G H L, & æqualis angulo F, & propterea angulus F minor est, quàm G H L.* b



31. lib. 1. Si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis, &c. *Addo: Manifestum est rectam B D ex centro ductam sectionem secare in B, & propterea occurrere potentiali G L à vertice remotiori, quàm B I inter puncta G, & L, & erit F I, & cætera.* c

Erit I D ad L D, nempe B I ad M L, &c. *Addo (propter parallelas B I, M L, & similitudinem triangulorum D B I, & D M L.)* d

Quia angulus A F B minor est, quàm angulus A H G, &c. *Addo: Et sumpto communi angulo F H N erunt A F B, seu H F N, & F H N simul sumpti minores duobus angulis G H A, F H N, qui duobus rectis æquales sunt; quare B F, G H, concurrunt ad partes F, & H, vt in N.* e

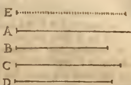
Pro intelligentia sequentium propositionum hæc præmitti debent.

LEMMA V.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. Dico, rectangulum sub extremis A, D contentum maius esse eo, quod sub medijs B, C continetur, & è conuerso.

FIat vt C ad D, ita E ad B; patet ex elementis, A excedere ipsam E; quare rectangulum A D maius erit rectangulo E D: est verò rectangulum B, C sub

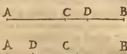
C sub intermedijs contentum æquale ei, quod sub extremis E, D quatuor proportionaliũ continetur; ergo rectangulum A D maius est rectangulo B C. Postea sit rectangulũ A D maius rectangulo B C; Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D; Si enim hoc verum non est, habebit A ad B eandem, aut minorem proportionem quàm C ad D, quare rectangulum A D æquale, aut minus erit rectangulo B C, quæ sunt contra hypothesim; igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D.



L E M M A. VI.

SI recta linea A B secetur bifariam in C, & non bifariam in D: Dico, quod semissis C B ad alterum segmentorum inæqualium D B habet maiorẽ proportionẽ, quàm reliquum inæqualiũ A D ad alterã medietatẽ A C.

Quoniam quadratum semissis C B, seu rectangulum B C A maius est rectangulo A D B sub inæqualibus segmentis contento; ergo ex præcedenti lemmate C B ad D B maiorem proportionem habet, quàm A D ad A C; Assumitur in sequenti prop. 52. problema antiquum inuentionis duarum mediarum continuè proportionalium inter duas rectas lineas datas, cuius constructio, & demonstratio ab Apollonio inuenta adhuc legitur apud Eutocium, sed organica quidem illa est, & ad manuum operationes maximè accomodata, non omnino diuersa ab ea, quàm Hero, & Philo ediderunt. At Parmenion aliam eiusdem problematis demonstrationem Apollonio tribuit paulò diuersam ab ea, quàm Eutocius recensuit: eam sane nec percepit, nec rite exposuit, Philoponus, quàm enim petitionem non demonstratam ipse vocat consequẽtia est necessaria ex descriptione hyperboles, quæ omnino subintelligi, & adiungi debet, vt colligitur ex Pappi verbis: hi enim (scilicet Hero, & Philo) asserentes problema solidum esse, ipsius constructionem instrumentis tantum perfecerunt congruenter Apollonio Pergæo, qui resolutionem eius fecit per conisectiones. Erit igitur Apollonij propositio huiusmodi.



Cõm. lib. 2. Arch. de Sphæra, & Cylin. Prop. 2.

In lib. 5. Post Analit. comm. 36.

Coll. lib. 3. Prop. 4.

L E M M A VII.

INter rectam lineam A C maiorem, & B C minorem duas medias proportionales reperire.

Conueniant illæ ad angulos rectos in A, & compleatur Parallelogrammum A B D C, cui circumscribatur circulus diametro D A, & per punctum D circa asymptotos C A B describatur hyperbole D F, & ducatur recta D M circulum tangens in D, & recta I D K sectionem ibidem contingens, occurrens asymptotis in I, & K, erunt quidem I D, & I K æquales inter se, & D C parallela est A K, ergo I C æqualis est C A: pari ratione K B æqualis erit B A, sed posita fuit C A maior quàm A B, ergo in triangulis I A D, & K D A basis I A maior erit, quàm A K, & latera I D, D K æqualia sunt, & D A est commune, igitur angulus A D I maior erit angulo A D K, & propterea recta linea I K sectionẽ con-

Prop. 4. lib. 2.

Prop. 34. lib. 1.

3. lib. 1.

contingens in D intra circulũ cadet ad
partes acuti anguli A D K, sed qualibet
recta linea ex D inter tangentes K D,
& D M incedens secat circulum, &
36. lib. 1. hyperbolam D F, ergo circuli periphe-
ria, & hyperbole non ad easdem par-
tes caua se mutuo secant in duobus pun-
33. lĩ. 4. ctis: concurrant in D, & F, & co-
niungatur recta linea D F, quæ pro-
8. lib. 2. ducta secet asymptotos in punctis G,
& H: ostendendũ est rectas B H, & G C
esse duas medias proportionales quæsitas.
Quoniã eiusdem rectæ lineæ portiones G
Ibidem. D, & F H inter hyperbolen, & asym-
ptotos intercepta æquales sunt inter se, addita communi D F, erunt F G, & G H inter se quoq; æquales quare rectangulum D H F æquale erit rectangulo F G D, sed rectangulũ A H B æquale est rectangulo D H F, (eo quod ab eodem puncto H extra circulum posito ducuntur duæ rectæ lineæ circulum secantes): simili modo rectangulũ A G C æquale est rectangulo F G D, igitur duo rectangula A G C, & A H B æqualia inter se erunt, & ideo vt G A ad A H, ita erit reciprocè B H ad G C, sed vt G A ad A H; ita est D B ad B H, nec non G C ad C D, (propter æquidistantiã ipsarum D B, G A, & ipsarum C D, & A H, & similitudinem triangulorum), quare D B, seu C A ad B H eandem proportionem habebit, quàm B H ad G C, & eandem, quàm habet G C ad C D, seu ad A B, & propterea quatuor rectæ lineæ C A, B H, C G, & B A erunt in continua proportionalitate, quod erat propositum.

SECTIO OCTAVA

Continens Prop. IL. L. LI. LII. LIII. Apoll.

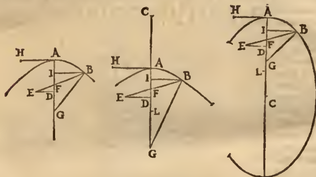
SI mensura non excedit comparatam, nullus ramorum secantiũ ex concursu egredientium erit Breuisecans: & lineæ breuissimæ ab extremitatibus ramorum ductæ in sectione abscindunt ex axi lineam maiorem, quàm abscindunt rami (51. & 52.) Si verò mensura a
excedit comparatã exponi debet linea certis quibusdam legibus inuenienda, quæ vocabitur TRVTINA. Et siquidẽ perpendicularis maior fuerit illa, tunc rami habebunt proprietates memoratas; si verò æqualis fuerit, tunc inter ramos vnicus breuisecans assignari potest, & propietates reliquorũ ramorũ erunt illæ eædem superius expositæ; si verò minor est illa, ramorũ omniũ duo tantum breuisecantes erunt, reliquorum verò, qui non intercipiuntur inter duos breuisecantes, eædem propietates erunt; eorũ verò, qui intercipiuntur, lineæ breuissimæ egredientes ab earum extremitatibus abscindunt ex axi lineas minores, quàm secant rami ipsi. Oportet autem

in ellipsi,

in ellipsi, vt mensura sumatur in maiori duorum axium, & rami egrediantur ad eius sectionem.

PROPOSITIO IL. & L.

b EX E concursu super perpendicularem E D educamus E B secantem mensuram A D in F, & sectionem A B in B, & sit A H dimidium erecti; sitque mensura A D non maior, quàm
c H A. Dico quod BF non erit breuissima, & minima egrediens ex B abscindit ex sagitta maiorem lineam, quàm F A: at si fuerit A D maior, quàm A H, tunc B F potest esse linea breuissima.



d EDucamus iam B I perpendicularem ad axim, & supponamus prius A D non maiorem quàm A H, & sit sectio parabole; igitur D I minor est, quàm A H, & ponatur G I æqualis A H, erit B G minima (8. ex quinto) & abscindit G A ex sagitta maiorem, quàm A F; si verò se-
e ctio fuerit hyperbole, aut ellipsis, sit centrum C; ergo A C ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, quare C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H; ponatur ergo I C ad I G, vt A C ad A H; ergo B G est minima, & abscindit (9. & 10. ex quinto) G A maiorem, quàm F A, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LI.

DEindè fit D A maior quàm A C, ſitque prius ſectio parabole, & ſecetur ex D A ipſa D F æqualis A C, & A G fiat pars tertia ipſius A F, educaturque B G perpendicularis ad axim, & vt D F ad F G, ita fiat B G ad lineam H (& hæc eſt Trutina) coniungaturque B E; & ſiquidem D E fuerit maior quàm H. Dico, quod nullus ramus breuiſecans duci poteſt. a

Quoniam D E maior eſt, quàm H habebit D E ad B G, nempe D I ad I G maiorem rationem, quàm G F ad F D, & componatur proportio, vt demonſtretur, quod I G minor ſit, quàm D F, quæ æqualis eſt ipſi A C; breuiſſima itaque egrediens ex B abſcindit ex ſagitta A D maiorem lineam, quàm A I (13. ex quinto); poſtea ducamus ex E ad ſectionem ramos E K, E L ad vtramque partem B E, & duas perpendiculares KM, LN, producamus vſq; ad Q O tangẽtem ſectionem in B; & quoniã ſectio eſt, parabole, & O Q tãgens eſt, igitur O G eſt dupla ipſius A G, quę eſt ſemiſſis ipſius F G; ergo G F æqualis eſt G O, erit igitur G O ad O M, nempe B G ad P M in maiori proportione, quã M F ad F G; itaque M K in F M minus eſt, quàm B G in G F, quod eſt minus quàm E D in D F propterea quod E D maior eſt quàm H; igitur E D in D F multò maius eſt, quàm K M in M F, quare E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & componendo patet, quod D F maior ſit, quàm R M. Igitur breuiſſima egrediens ex K (13. ex quinto) cadit extra R K; Et ſimili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens

b c d e f

35. lib. 1.

egrediens ex puncto L cadit extra LS, quapropter duci non poteſt ex E ad ſectionem L B A linea, aliqua cuius portio intercepta inter axim, & ſectionem, ſit linea breuiſſima.

Pariter demonſtrabitur, quemadmodum iam oſtenſum eſt, quod ſi E D
g fuerit æqualis H, tunc G I æqualis erit D F, quæ eſt æqualis ipſi A C; & ideo B I (8. ex quinto) vna eſt ex breuiſſimis, non autem R K, quia demonſtrabitur, quod E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & propterea D F maior erit, quàm R M; breuiſſima ergo cadit extra R K. (13. ex quinto) Et S L quoque non eſt ex breuiſſimis, quod ita demonſtrabimus; Si N S minor eſt, quàm D F; ergo breuiſſima egrediens ex L cadit extra S L; Non igitur ex E duci poteſt ad ſectionem linea breuiſecans præter E B, & hoc erat oſtendendum.

Tertio loco ſit E D minor quàm H, & oſtendetur quod E D in D F
h minus eſt, quàm B G in G F; poſtea ponamus T G in G F æquale illi, & erigamus ſuper F perpendicularem F V, & ducamus per T ſectionem 4. lib. 2.
hyperbolicam circa duas continentes A F, & F V; duæ ſectiones ſe mutuò ſecabunt in duobus punctis, & ſint K, L, & educamus ex illis duas L N, P K M perpendiculares ad A D. Et quoniam perpendiculares K M, T G, L N parallelæ ſunt continenti V F, erit K M in M F æquale L N in N F (12. ex ſecundo) & quodlibet eorum æquale eſt T G in G F, quod factum eſt æquale E D in D F; igitur E D ad K M, nempe D R ad R M eſt vt M F ad F D, & componendo patet, quod D F eſt æqualis R M, & pro-
i pterea K R eſt linea breuiſſima (8. ex quinto.)
k Et ſimiliter patebit, quod L S ſit breuiſſima.
l Et cum B I intercipiatur inter illas patet etiam, quod B G in G F maius ſit, quàm E D in D F, oſtendetur vt dictum eſt, quod I G maior ſit, quàm D F; breuiſſima ergo ducta ex B cadit inter I, & A.

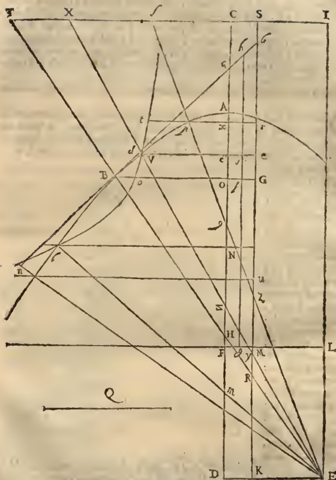
m Deindè ex concurſu E ad ſectionem parobolicam A B Z educamus E X, E Z; quas interſecant *l* Z, X Y perpendiculares ad A D, quæ parallelæ ſunt continenti F V ſecantes K T L hyperbolen, ergo *a* Y in Y F æquale eſt G T in G F, quod factum eſt æquale E D in D F, itaque E D in D F maius eſt, quàm X Y in Y F; igitur E D ad X Y, quæ eſt vt D *b* ad *b* Y maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo patet, quod F D maior eſt quàm *b* Y; itaque breuiſſima egrediens ex X abſcindit ex A D lineam maiorem, quàm *b* A; Simili modo demonſtrabitur, quod Z *c*
n non ſit breuiſſima, & quod breuiſſima egrediens ex Z abſcindit ex A D lineam maiorem, quàm A *c*, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO LII. LIII.

Deindè ſit ſectio hyperbole, aut ellipſis A B, & axis illius C A D, centrum C, & D A menſura, quæ ſit maior dimidio erecti, & perpendicularis E D. Dico, quod rami egredientes ex E
a habent ſuperiùs expoſitas proprietates.

Itaque per C producamus CI parallelam perpendiculari ED, & ponamus quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & EK ad KD, vt b
proportio figuræ, & educamus ex E, K rectas EI, KS parallelas ipsi C
Lem. 7. AD, & interponamus inter FC, CA duas medias proportionales CN, c
CO, & erigamus per O perpendicularem BO, quæ occurrat sectioni in
B; & ponamus proportionem alicuius lineæ, vt Q ad BO compositam d
ex CD ad DF, & FO ad OC, & sit ED maior, quàm Q Trutina: Dico, quod nulla breuisecans egreditur ex E ad sectionem, & linea breuissima, egrediens ab extremitate cuiuslibet rami assignati, abscindit cum
A ab axi maiorem lineam, quàm secant illi rami. Producatur priùs EB e
secans axim in H, & quia ED maior est, quàm Q, ergo proportio ED f
ad BO (quæ componitur ex ED ad DK, nempe IC ad CS, & ex D
K, nempe GO ad OB) maior est proportione, quàm habet Q ad BO,
quæ ex hypothesi componebatur ex CD ad DF, & ex FO ad OC; sed g
ED ad DK est, vt CD ad DF (quia quælibet earum est, vt proportio
figuræ compositæ, vel diuisæ) remanet proportio OG ad OB maior ea,
Lem. 5. præm ff. quàm habet FO ad OC; igitur OG in OC, nempe rectangulum CG
maius est, quàm BO in OF: & ponamus rectangulum FG commune, h
erit rectangulum FS maius, quàm BG in GM; est verò rectangulum
FS æquale rectangulo EM (eo quod EK ad KD, nempe ad FM est, vt
SM ad MK, quia quælibet earum est, vt proportio figuræ; itaque re- i
ibidem. ctangulum EM maius est, quàm MG in GB, & propterea EK ad BG,
nempe KR ad RG maiorem rationem habet, quàm GM ad MK, ergo
componendo, patet, quod KM, nempe DF maior est, quàm GR, &
ideo EI ad KM, nempe CD ad DF, seu IC ad CS minorem proportionem habet, quàm EI ad GR, quæ est, vt IT ad BG, propter similitudinem duorum triangulorum EIT, BGR, ergo IT ad BG maiorem k
Lem. 4. præm. rationem habet, quàm IC ad CS, seu ad OG; & comparando homologorum differentias in hyperbola, & eorum summas in ellipsi, habebit
CT ad BO, nempe CH ad HO maiorem rationem, quàm IC ad CS,
nempe CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi CO ad OH, habebit maiorem proportionem quàm CF ad FD, quæ est, vt proportio figuræ; igitur breuissima egrediens ex B (9. 10. ex quinto) abscindit cum A maiorem lineam, quàm AH.

Posteà educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, & producamus eam, quousque occurrat CI ad X, & ducamus per B lineam tan- l
gentem sectionem, quæ occurrat inclinato, siue transuersæ in *a*, & per V
ducamus perpendicularem super axim, cui occurrat ad *c*, & occurrat tangenti B *a* in *d*; & quoniam OG ad OB, quemadmodum demonstrauimus, maiorem proportionem habet, quàm FO ad OC, ponamus *f*O ad
OB, vt FO ad OC, & per *f* producamus *f g h* parallelam axi AD: Et m
quia *f*O ad OB est, vt FO ad OC, erit rectangulum *f*O C æquale BO
in OF, & ponamus rectangulum *f*F communiter fiet B *f* in *f g* æquale *g* n
F in FC, & quia CO inuersa in trutinatam C *a* æquale est quadrato C
A dimidij inclinati, siue transuersæ (39. ex primo) erit OC ad CA, vt
37. primi. CA ad C *a*; igitur C *a* est linea quinta proportionalis aliarum quatuor o
linearum proportionalium assignatarum; ergo FC ad CO est, vt CO ad
C *a*



C *a*, & comparando homologorum differentias erit F O ad O *a*, vt F C Lem. 4.
ad CO, quæ eſt, vt *f* B ad B O, nempe *f h* ad O *a*; igitur proportiones ipſarum F O, *f h* ad eandem O *a* eædem ſunt; ergo ſunt æquales; & propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, & componendo *f h* ad *i h*, nempe B *f* ad V *i* maiorem proportionem habet, quàm *i g* ad *g f*; ergo B *f* in *f g*, nempe rectangulum *g* C maius eſt quàm *i* V in *i g*, & ponamus rectangulum *g e* commune, erit aggregatum rectangulorum

p

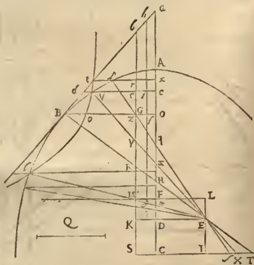
q

gulorum C g, g c, in hyperbola, vel eorum exceſſus in ellipſi maior, quàm M e in e V, ergo rectangulum C M, nempe rectangulum E M multò maius eſt, quàm V e in e M, & propterea E K ad e V, nempe K Y ad
Lem.5. Y e maiorem proportionem habet, quàm e M ad M K, & componendo patet, quod e Y minor ſit, quàm K M, & conſtat (quemadmodum antea demonſtrauimus) quod breuiſſima egrediens ex V abſcindit ab axi maiorem lineam quàm c Z.

Simili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex l eiuſdem ſit rationis.

DEinde ſit E D æqualis Q, inde demonſtrabitur, (quemadmodum ſupra factum eſt) quod B H tantùm ſit linea breuiſſima, & quod minima egrediens ex V abſcindit ab axi cum A maiorem lineam, quàm A Z, & quod minima egrediens ex l ſecet maiorem lineam, quàm A m.

Tandem ponamus E D minorẽ, quàm Q, ergo E D ad B O minorẽ proportionem habet, quàm Q ad eandem; & demõſtrabitur (quemadmodum dictũ eſt) quod G O ad O B minorem proportionem habeat, quàm F O ad O C; & ponamus O G ad O o, vt F O ad O C; & producamus per o ſectionẽ hyperbolicam circa duas continentes S M, M F, quę ſecet ſectionem A B in V, l, & iungamus E V, E l, & producamus ex V, l duas perpendiculares V c, l P, quæ parallelæ ſint continenti M F, ergo o G in G M eſt æquale V e in e M (12. ex ſecundo) & quia G O ad O o eſt, vt F O ad O C erit o O in O F æquale rectangulo G C, & ponamus rectangulum F G commune fiet rectangulum C M (quod erat ęquale rectangulo M E) æquale ipſi o G in G M, quod eſt æquale ipſi V e in e M; ergo rectangulum E M æquale eſt ipſi V e in e M. Tandem proſequamur ſuperiorem demonſtrationem, vt oſtendatur veritas reliquarum propoſitionum, & hoc erat propoſitum,



PROP.

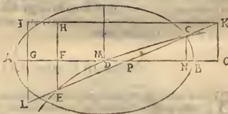
PROPOSITIO LIV. LV.

a ITaque ostensum est, vti memorauimus, quod ex concursu duarum breuissimarum ad conisectionem non egrediatur alia breuisecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concursu educti ad sectionem habent proprietates superiùs expositas.

PROPOSITIO LVI.

In ellipsi ramorum, secantium vtrumque axim, à concursu vltra centrum posito egredientium, vnius tantum portio, inter
a axim maiorem, & sectionem intercepta, erit linea breuissima, siue mensura ipsam comparatam, nec non perpendicularis ipsam trutinam superet, æquet, vel ab ea deficiat.

b SIt sectio ellipsis ACB, & axis maior transuersus AB perpendicularis EF, centrum D, & ponamus DG ad GF, vt proportio figuræ, & similiter EH ad HF, & producamus per H rectam IHK parallelam ipsi AB, & per G rectã IGL ipsi EF, quæ sibi occurrant
c in I, & ducamus per punctum E sectionem hyperbolen EMC circa duas eius continentes LI, IK, quæ occurret sectioni ACB ellipticæ, quia IL, IK sunt duæ cõtinentes sectionem EMC, & proportio EH ad HF posita est, vt DG ad GF; 4. lib. 2.



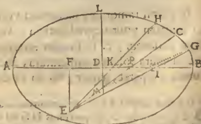
d ergo EH prima proportionalium in HI, nempe GF quartam, æquale est DG secundæ in IG, nempe FH tertiam; ergo punctum M est in illius diametro, & propterea sectio hyperbole EMC transit per centrum sectionis ellipsis ACB; quare duæ sectiones se inuicem secant, sitque
e concursus in C, & producamus per E, C lineam occurrentem duabus continentibus sectionem in L, K, & producamus duas perpendiculares CN, KO super AB. Et quia KC, LE sunt æquales (16. ex secundo) erit GF 8. lib. 2.
f æqualis ON; quare FO æqualis est ipsi GN; atque EH ad HF, nempe EK ad KP, seu FO (quæ est æqualis ipsi GN) ad OP eandem proportionem habet, quàm DG ad GF, quę est ęqualis ipsi ON, & ideo GN ad OP est, vt DG ad ON, & comparando homologum differentias DN Lem. 3.
ad NP

ad N P erit, vt D G ad G F, quæ est proportio figuræ; ergo C P est linea breuissima. (10. ex quinto) Et hoc fuit propositum.

PROPOSITIO LVII.

Et dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, à quo abscindi possit inter sectionem, & D B linea breuissima. g

NAm si producantur E H, E G ad vtrasque partes ipsius E C secantes D B in K, I, & producamus per D perpendicularem ad A B, h quæ occurrat sectioni ad L, & ipsi E C ad M, quia iam i productæ sunt ex concursu M duæ breuisecantes M C, M L (51. ex quinto) igitur linea educta ex M ad H abscindit ex D B cum B maiorem lineam, quàm secat k breuissima egrediens ex H (11. ex quinto) & linea educta ex M ad G abscindit ex D B lineam minorem ea, quàm secat linea breuissima egrediens ex G (51. ex quinto) sed E H, & E G efficiunt abscissas opposito modo; ergo non sunt duæ breuisecantes, & propterea non reperitur alius ramus, cui competat proprietas ipsius E C, & hoc erat ostendendum.



Notæ in Proposit. IL. L.

SI verò mensura excedit comparatam educatur linea, ad quam comparatur perpendicularis, & vocabo lineam illam Trutinam, &c. *Sic legendum puto: Si verò mensura excedit comparatam exponi debet linea certis quibusdam legibus inuenienda, quæ vocabitur Trutina.* a

Ex E concursu super perpendicularem, &c. *Idest. Ex E concursu perpendicularis E D ad axim A G, & ramorum secantium educamus E B secantem mensuram, &c.* b

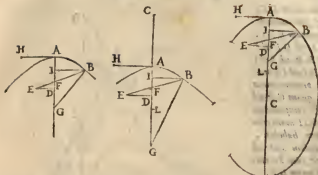
Tunc B F non est ex minimis, &c. *Dico quod B F non erit recta linea minima earum, quæ inter punctum sectionis B, & axim intercipitur.* c

Et ponatur G I æqualis A H, &c. *Et ponatur G I æqualis A H, iungaturque B G, cumque A D posita sit non maior, quàm H A, erit illius portio F I minor, quàm A H, seu quàm G I, ergo B G est breuissima, &c.* d

8. huius.

Ergo C A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D; quare D I ad I F, &c. *Ergo G A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & addatur indirectum recta A L æqualis A H in hyperbola, &* e

auferatur

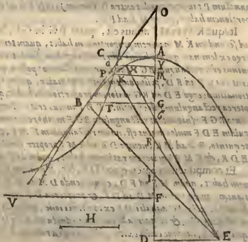


auferatur in ellipsi; quare C A ad A L non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi C L ad A L, non habet maiorem proportionem, quàm C D ad D A, sed C D ad A D minorem proportionem habet, quam ad eius segmentum I D, ergo diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi habebit A C ad A D, & adhuc ad A L, seu A H minorem proportionem, quàm C I ad I D, habet verò C I ad I D minorem rationem, quàm ad eius segmentum I F; igitur C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H.

Notæ in Proposit. LI.

a Dico quod nullus ramus breuisecans duci potest, &c. *Dico, quod ex concursu E ad sectionem nullus ramus breuisecans duci potest.*

b Quoniam D E maior est, quàm H, &c. *Quoniam D E maior est, quàm H habebit E D ad B G maiorem rationem, quàm H ad eandem B G; posita autem fuit inuerse G F ad F D, vt H ad B G; ergo E D ad B G maiorem rationem habet, quàm G F ad F D; & pro-*



pter

pter parallelas D E, B G, & similitudinē triangulorum E D I, & B G I, est D I ad I G, vt E D ad B G; igitur D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & componendo D G ad G I maiorem rationem habebit, quàm eadem G D ad D F; & Ideo I G minor est, quàm D F. c

Igitur G F æqualis eſt G O, ergo G O ad O M, &c. *Igitur G F æqualis est G O, & quia F O secatur bifariam in G, & non bifariam in M (ex lemmate sexto huius libri) habebit semisſis G O ad vnum segmentorum inæqualium M O maiorem proportionem, quàm reliquum segmentum M F ad alteram medietatem F G, sed propter parallelas P M, B G, & similitudinem triangulorum B G O, P M O est G O ad O M, vt B G ad P M, ergo B G ad P M maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G: habet verò B G ad minorem M K maiorem proportionem, quàm ad M P (cum punctum P tangentis cadat extra sectionem); ergo B G ad K M adhuc maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G.*

Itaque K M in M F minus eſt, quàm B G in G F, &c. *Quoniam prima B G ad secundam K M maiorem proportionem habet, quàm tertia M F ad quartam F G; ergo ex lemmate quinto huius libri rectangulum sub intermedijs contentum K M F minus erit rectangulo B G F sub extremis cōtento; postea, quia H ad B G ex hypothesi erat, vt G F ad F D, posita autem fuit E D maior, quàm H, quæ est prima proportionalium; ergo E D ad B G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & pro-* d

Lem. 5. *pterea rectangulum sub extremis E D F maius erit rectangulo sub intermedijs contento B G F; fuit autem rectangulum B G F maius rectangulo K M F; igitur rectangulum E D F multò maius est, quàm rectangulum K M F, & ideo, ex eodem lemmate quinto, E D ad M K, nempe D R ad R M (propter similitudinem triangulorum E D R, & K M R) maiorem rationem habet, quàm M F ad F D.*

Et componendo patet, quod D F, &c. *Quoniam D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, componendo D M ad M R habebit maiorem proportionem, quàm eadem M D ad D F, & propterea D F maior est, quàm R M, est verò semisſis erecti A C æqualis D F ex constructione, igitur M R minor est A C medietate lateris recti, & propterea breuiſsima educta ex K secat ex axi segmentum maius,* e

8. huius. *quàm M R; ideoque cadit extra, scilicet infra ramum K R E.*

Et

f Et ſimili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex puncto L cadit extra S L, &c. *Ad vitandam confuſionem figuræ, & prolixitatem demonſtrationis appoſui duas figuras, in quibus duo caſus iiſdem caracteribus notantur, itaque abſq; nouo labore, ſi inſpiciatur ſecunda figura, iiſdem verbis prioris caſus, oſtendetur caſus ſecundus.*

g Pariter demonſtrabitur, quemadmodum iam oſtenſum eſt, &c. *Pars ſecunda huius propoſitionis innititur tantummodo paucißimis verbis; quare maioris claritatis gratia integram demonſtrationem hic afferre libuit.*

Demonſtratio ſecundæ partis.

PROPOSITIONIS LI.

Eſto E D æqualis trutinæ H: Dico ex concurſu E vnicum tantum breuiſecantem ramum duci poſſe.

In eadem figura, quia ex conſtructione H ad B G eſt, vt G F ad F D, ponitur verò E D æqualis H; ergo E D ad B G, ſeu D I ad I G (propter ſimilitudinem triangulorum E D I, B G I) eſt, vt G F ad F D, & componendo D G ad G I eſt, vt eadem G D ad D F; ideoque I G æqualis eſt D F, ſeu A C ſemierecto; igitur B I eſt breuißima. 8. huius.

Poſtea ducto quolibet ramo E K ſupra breuiſecantem E B (in prima figura, & infra in ſecunda) occurrente axi in R, & ducta K M perpendiculari ad axim, quæ cum ſecet in M, & tangentem O B in P. Quoniam (vt dictum eſt) O F ſecatur bifariam

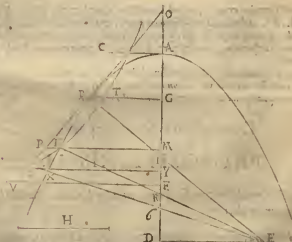
 in G,

in G, & non bifariam in M, ergo (ex lemmate sexto huius libri) G O ad O M, seu G B ad P M (propter similitudinem triangulorum B G O, & P M O) & multo magis G B ad illius portionem K M habebit maiorem proportionem, quàm M F, ad F G; ideoque rectangulum K M F sub intermedijs contentum minus erit rectangulo B G F contento sub extremis nõ proportionalium; sed rectangulum B G F æquale est rectangulo E D F (propterea quod D F, ad F G erat, vt B G ad H, seu ad ei æqualem E D) igitur rectangulum K M F minus erit rectangulo E D F, & propterea E D ad K M, seu D R ad R M (propter similitudinem triangulorum E D R, K M R) maiorem rationem habebit, quàm M F ad F D, & componendo, eadem D M maiorem rationem habebit ad R M, quàm ad F D, & propterea R M minor erit, quàm F D, seu quàm A C; igitur minimus ramorum ex K ad axim cadentium fertur infra K R; Quapropter ramus E K supra, vel infra breuisecantem E B ad sectionem ductus non est breuisecans, & abscindit ex axi segmentum A R minus, quàm abscindat breuissima ex K ad axim ducta, quod erat ostendendum.

Lem. 5. premis. Lem. 5 premis. ex 8. 13. huius.

Tertio loco sit E D minor, quàm H, & ostendetur, &c. *Quia H ad B G est, vt G F ad F D, estque E D minor, quàm H; ergo E D ad B G minorem proportionem habet, quàm G F ad F D; & ideo rectangulum E D F sub extremis contentum minus est rectangulo, quod sub intermedijs continetur, ponatur iam rectangulum T G F æquale rectangulo E D F, & per F ducatur F V perpendicularis super axim A D,* h

Lem. 5. premis.

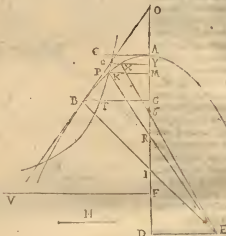


Et componendo, patet, quod D F est æqualis R M, &c. *Nam D R ad R M est, vt M F ad F D, & componendo, eadem D M ad R M, atque ad D F, seu ad semierectum A C eandem proportionem habebit, & ideo D F est æqualis R M.* i

Et

k Et similiter patebit, quod L S sit breuissima, &c. *Secundus casus absque vllo labore ostensus erit ijsdem verbis, & caracteribus, quibus casus primus expositus fuit, si inspiciatur secunda figura.*

l Et cum B I intercipiatur inter illas patebit etiam, &c. *Et cum B I intercipiatur inter duos ramos breuisecantes E K, qui ducuntur ex punctis K, in quibus hyperbole K T L secat parabolen A B L, cadet punctum T hyperboles intra parabolen; quare rectangulum B G F maius erit rectangulo T G F, seu K M F, quod æquale est rectangulo E D F, vt dictum est, quare E D ad B G, seu D I ad I G (propter similitudinem triangulorum E D I, B G I) habebit minorem proportionem, quàm G F ad F D, & componendo, eadem D G ad G I minorem proportionem habebit, quàm G F ad F D, siue ad A C, & ideo I G maior erit, quàm A C.* Lem. 5. præmis.



m Deinde ex concursu E ad sectionem, &c. *Deinde ex concursu E ad sectionem A B parabolen educantur duo rami E X supra breuisecantem E K in prima figura, & infra eamdem in figura secunda, & ex punctis X ducantur duæ X Y perpendiculares ad axim, secantes axim in Y, & hyperbolen K T in a existēte extra parabolen; cumque duæ rectæ a Y, necnō T G parallelæ sint cōtinenti F V, & interponātur inter hyperbolē K T, & reliquā continentem F A erit rectangulum a Y F æquale rectangulo T G F, quod factum est æquale rectangulo E D F, estque X Y portio ipsius a Y; igitur rectangulum E D F maius erit rectangulo X Y F, & ideo E D ad X Y, seu D b, ad b Y (propter similitudinem triangulorum E D b, X Y b) maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo eadem D Y ad Y b maiorem proportionem habebit, quàm ad D F, seu C A.* 12. lib. 2. Lem. 5. præmis.

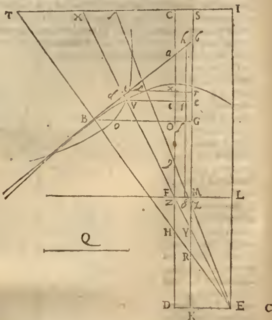
n Simili modo demonstrabitur, &c. *Absque noua demonstratione propositum ostendetur inspiciendo secundam figuram.*

Notæ in Propos. LII. LIII.

a Dico, quod rami egredientes ex E habent superiùs expositas proprietates, &c. *Idest easdem, quas habent rami in parabola educti iuxta comparationem perpendicularis E D ad Trutinam.*

Et

Et ponamus quamlibet duarum proportionum C F ad F D, & I S ad S C, vt proportio figuræ, & educamus ex E, S, &c. *Idest fiat distantia ex centro vsque ad perpendicularem E D ad eius portionem D F in hyperbola, vt summa lateris transuersi, & recti ad latus rectum, & vt eorum differentia in ellipsi ad latus rectum ita fiat C D ad eius productionem D F; tunc enim C F ad F D diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi habebit eandem proportionem, quàm latus transuersum ad rectum; pariterq; fiat E K ad K D in eadẽ proportione figuræ, & ex E, K educamus rectas E I, K S parallelas axi A C D, secantes I C, & L F parallelas ipsi E D in I, S, L, & M. Immutaui postremã partem constructionis, vt manifestè erroneã in textu Arabico; Si enim I C ad libitum sumpta secatur in S in ratione C F ad F D non cadet necessariò E L parallela C D super punctum I.* b



Et interponamus inter F C, C A duas C N, C O proportionales illis duabus, &c. *Textum corruptum sic restituo: Interponamus inter F C, & A C duas medias proportionales, itaut F C, N C, C O, C A sint continuè proportionales, quod fieri posse constat ex lemmate 7. huius libri.* c

Et ponamus proportionem lineæ alicuius, vt est Q compositam, &c. *Vocatur Trutina in hyperbola, & ellipsi linea recta Q, quæ ad B O compositam proportionem habet ex C D ad D F, & ex ratione F O ad O C.* d

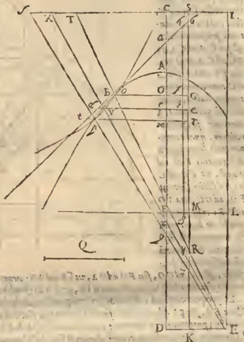
Producatur priùs E B secans axim in H, &c. *Producatur priùs E B secans axim in H, & rectam S K in R, nec non rectam I C in puncto T.* e

Ergo E D ad B O, quæ componitur ex E D ad D K, &c. *Nam posita intermedia D K, proportio E D ad B O composita erit ex ratione E D ad D K, & ex ratione D K ad B O; est verò I C ad C S, vt E D ad D K (propter parallelas I E, S K, C D) atque D K est æqualis G O in parallelogrammo G D; ergo proportio E D ad B O componitur ex ratione I C ad C S, & ex ratione G O ad O B.* f

Sed E D ad D K est, vt C D ad D F, quia quælibet earum vt proportio g

figuræ

figuræ compositæ, vel diuisæ, &c. *Quia E K ad K D, atque C F ad F D eandem proportionem habebant, quàm latus transuersum ad rectum; ergo componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi erit E D ad D K, vt C D ad D F.*



h Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet rectangulũ F G addatur in hyperbola, & auferatur cõmuniter in ellipsi.*

i Et propterea E K ad B G, nempe K R ad R G, &c. *Quia propter similitudinem triangulorum E K R, & B G R erit E K ad B G, vt K R ad R G; quare K R ad R G maiorem proportionẽ habet, quàm G M ad M K; & componendo K G ad G R maiorem rationem habet, quam eadem G K ad K M, quare K M, nẽpe c i æqualis D F maior est, quàm G R.*

k Et auferẽdo homologũ ab homologo in hyperbola, & coniungendo e a in ellipsi, habebit, &c. *Scilicet comparando homologorum differentias in hyperbola, eorundem summas in ellipsi, idest C T ad B O, nempe C H ad H O (propter similitudinem triangulorum C H T, & O H B) habebit maiorem proportionem, quàm I C ad C S, nempe C D ad D F.* Lem. 4. præmiss.

l Postea educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, &c. *Educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, qua secet axim in Z, & S M in Y.*

m Et per f producamus f g h parallelam axi A D, &c. *Et per* f *ducamus* f g *parallelam axi A D, qua secet tangentem B* a *in* h, *& L F in* g, *atque V* c *secet illam in* i, *& S M in* c.

n Et ponamus rectangulum F f communiter, &c. *Et communiter addamus in hyperbola, & auferamus in ellipsi rectangulum F* f, *fiet rectangulum B* f g *æquale rectangulo* g *F C. Nomina Inuersi, & Trutinata definita fuerunt in primo libro ab interprete Arabico.*

Igitur

Igitur C *a* eſt linea quinta proportionalis aliarum quatuor, &c. *Quia poſita fuerunt quatuor rectæ lineæ F C, N C, O C, C A continuè proportionales, eſtque C A ad C* a, *vt* o
37. lib. 1. *O C ad C A; ergò prima F C ad tertiam O C eamdem proportionem habet, quàm O C ad quintam C* a *continuè proportionalium, quare comparando homologorũ*
Lem. 4. præmiſſ. *differentias F O ad O* a *eſt, vt F C ad C O; ſed facta fuit vt F O, ad O C, ita* f *O ad O B; ergo componendo in hyperbola, & comparando differentias terminorũ*
Lem. 2. præm. *ad conſequentes in ellipſi, eſt F C ad C O, ſeu F O ad O* a, *vt* f *B ad B O; nempe vt* f h *ad eandem O* a, *propter ſimilitudinẽ triangulorum B* f h, *& B O* a; *& ideo F O, &* f h *æquales ſunt.*

Et propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, &c. p
Quia F O, ſeu g f *oſtenſa fuit æqualis* f h *erit* g h *ſecta bifariam in* f, *& non bifariam in* i *propterea (ex lemmate ſexto huius lib.) habebit* f h *ad* i h, *ſcilicet B* f *ad* d i *(propter ſimilitudinem triangulorum B* f h, d i h*) maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ſed B* f *ad V* i *portionem ipſius* d i *habet maiorem proportionem, quàm ad*
Lem. 5. d i; *ergo B* f *ad V* i *habet maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ergo rectangulum*
In nota literę n præm. *B* f g, *nempe rectangulum* g *C (quod eſt oſtenſum ei æquale) maius eſt rectangulo V* i g.

Et ponamus rectangulum *g e* commune, &c. *Et addamus in hyperbola, & auferamus in ellipſi rectangulum* g e *communiter.* q

Et propterea E K ad *e* V, nempe K ad Y *e*, &c. *Sunt enim triangula E K Y, & V* e *Y ſimilia, ergo E K ad* e *V eſt, vt K Y ad Y* e, *quarè K Y ad Y* e *maiorem proportionem habet, quàm* e *M ad M K, & componendo, eadem K* e *maiorem proportionem habet ad* e *Y, quàm ad M K, ſeu ad F D; vnde patet, quod* e *Y minor ſit, quam F D.* r

Et conſtat quemadmodum antea demonſtrauimus, &c. *Quoniam* e *Y minor oſtenſa eſt, quam K M ergo eadem E I ad Y* e, *ſeu I X ad V* e *(propter ſimilitudinem triangulorum E I X, Y* e *V) maiorem proportionem habebit, quàm E I ad M K, ſeu I C ad C S, vel ad ei æqualem* c c; *igitur comparando homologorum ſummas* ſ

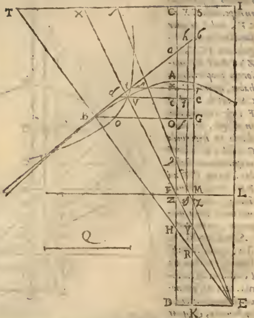
mas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C X ad c V, vel (propter similitudinem triãgulorum X C Z, V c Z) C Z ad Z c maiorem proportionem habet, quàm I C ad C S, vel C D ad D F; & componendo in ellipsi, & diuidendo in hyperbola C c ad c Z maiorẽ proportionem habebit, quàm C F ad F D, & ideo breuissima egrediens ex V abscindit lineã maiorem, quàm A Z. Lem. 4.

Similimodo cõstat, quod breuissima egrediens ex *l* eiusdem sit rationis, &c. *Absque noua demonstratione in secunda, & quarta figura propositum ostensum erit.*

a Deinde sit E D æqualis Q, inde demonstrabitur (quemadmodum supra factum est) quod B H tantum sit linea breuissima, &c. 9. 10. huius.

Secunda pars huius propositionis, quam Apollonius non exposuit hac ratione suppleri potest.

Sit E D aqualis Trutina Q, habebunt E D, atque Q eandem proportionem ad B O, componitur verò proportio E D ad B O ex rationibus E D ad D K, & D K ad B O, seu O G ad B O; componebatur autem proportio Trutina Q ad B O ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C; ergo ablata communiter proportione E D ad D K, vel C D ad D F, relinquetur proportio G O ad O B eadem proportioni F O ad O C; ergo rectangulum G O C sub extremis contentum aquale erit rectangulo B O F sub intermedijs comprehenso, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipsi communiter rectangulum F G, erit rectangulum F S aquale rectangulo B G M; Et quia I S ad S C, vel E K ad K D, vel ad F M erat, vt C F ad F D, vel vt S M ad M K; ergo rectangulum E M aquale est rectangulo F S; & propterea rectangulum E M aquale erit rectangulo B G M; quapropter vt E K ad B G, seu K R ad R G, ita erit G M ad M K, & componendo, eadem



K G eandem proportionem habebit ad R G, atque ad M K, vnde R G aqualis erit M K, vel F D, quare eadem E I ad K M, vel C D ad D F, siue I C ad C S eandem proportionem habebit, quam eadem E I ad R G, vel I T ad B G (propter similitudinem triangulorum I E T, & G R B) ergo comparando homologorum summas in ellipsi, vel differentias in hyperbola C T ad B O, vel C H ad H O (propter similitudinem triangulorum C H T, & O H B) eandem proportionē habebit, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & cōponendo in ellipsi C O ad O H eandem proportionem habebit, quàm C F ad F D, siue quàm habet latus transuersum ad rectum; & propterea B H est breuissima linearum ex B ad axim cadentium.

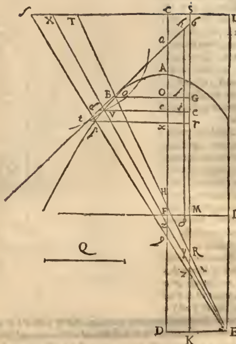
Lem. 4.

9. 10. huius.

Deinde educatur quilibet ramus E V supra, vel infra breuisecantem E B, qui productus secet rectam I C in X, & C A in Z, atque S M in Y, & educatur ex V recta V c perpendicularis ad axim, secans D F in c, & S M in c, atque contingentem sectionem in puncto B, scilicet ipsam B a secet in d. Et quia (vt modo ostensum est) rectangulum F S aquale est rectangulo B G M, suntque pariter ostensae O C, A C, C a proportionales; ergo C a est quinta proportionalis post quatuor praecedentes F C, N C, O C, A C continuè proportionales; & ideo F C ad C O est, vt C O ad C a; ergo comparando homologorum differentias tam in hyperbola, quàm in ellipsi erit, F O ad O a, vt F C ad C O: est autem G B ad B O, vt F C ad C O, vt antea ostensum est; ergo G B ad B O erit, vt F O ad O a; sed propter similitudinem triangulorum B G b, B O a est G B ad B O, vt G b ad O a; ergo F O, seu M G ad O a eandem proportionem habet, quàm G b ad eandem O a; & propterea M G aqualis est G b; cumque M b secetur aqualiter in G, & inaequaliter in c (ex lemmate 6. huius) G b ad c b, seu B G, ad d c, propter similitudinem triangulorum B G b, & B O a, & multo magis B G ad V c portionem ipsius d c habebit maiorem proportionem, quàm c M ad G M; ergo rectangulum

Lem. 3.

BGM sub extremis cõtentum maius erit rectãgulo V e M sub medijs comprahenso; b *erat autem prius rectangulum B G M æquale rectangulo E M; ergo rectangulũ E M maius est rectangulo V e M, & propterea E K ad V e, seu K T ad T e (propter similitudinem triangulorum E T K, & V e T) maiorem proportionem habebit, quàm e M ad M K, & componendo, eadem K e ad T e maiorem proportionem habebit, quàm ad M K; ergo T e minor est, quàm M K, quare E I ad T e, seu I X ad e V (propter similitudinem triangulorum I E X, e T V) habebit maiorem proportionem, quàm eadem E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad C e; & propterea comparando homologorum summas in ellipsi, & earundem differentias in hyperbola C X ad c V, vel C Z ad Z c (propter similitudinem triangulorum C Z X, V c Z) maiorem proportionem habebit, quàm S K, ad K M, seu C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C c ad c Z habebit maiorem proportionem, quàm C F ad F D, seu quàm latus transuersum ad rectum, & propterea breuissima linearum cadentium ex puncto V ad axim abscindet segmentum maius, quàm A Z, & ramus E V non erit breuissecans, quod fuerat ostendendum.* Lem. 5. Lem. 5. Lem. 4. ex 9. 10. huius.



b Et demonstrabitur, quemadmodum dictum est, quod GO ad BO minorem proportionem habet, quàm FO ad OC, &c. *Nam proportio E D ad B O componitur ex rationibus E D ad D K, & D K, seu G O ad B O. Pariterque proportio Trutinæ Q, quæ erat maior quàm E D ad B O componitur ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C, auferatur communis proportio E D ad D K, vel C D ad D F, remanet proportio G O ad O B minor proportione F O ad O C.*

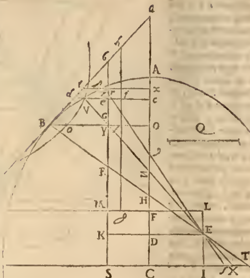
c Et producamus ex V, *l* duas perpendiculares V *e*, *l* P, quæ, &c. *Et producamus ex V, & V duas perpendiculares V e, quæ parallelæ sint continenti F M, & secent reliquas lineas in signis antea expositis; Rectangulum ergo V e*

in e *M æquale est rectangulo V* e *M, alterius figuræ, &c.*

Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipsi communiter rectangulũ F G.*

Tandem prosequamur superiorẽ demonstrationem, vt ostendatur veritas reliquarũ propositionum, &c.

Demonstratio ab Apollonio breuitatis gratia neglecta sic perficietur.



Quoniam rectangulum E M æquale est rectangulo V e *M, igitur vt E K ad V* e*, seu K Y ad Y* e *(propter similitudinem triangulorum E K Y, & V* e *Y) ita erit* e *M ad M K, & componendo, eadem* e *K habebit ad* e *Y, atque ad M K eandem proportionem, ideoque* e *Y æqualis est M K; quare E I ad K M, seu I C ad C S eandem proportionem habebit, quàm E I ad* e *Y, seu quàm I X ad* e *V (propter similitudinem triangulorum I E X, &* e *Y V) quare comparando homologorum differentias*

Lem. 3. *in hyperbola, & eorundem summas in ellipsi C X ad* c *V, vel C Z ad Z* c *(propter similitudinem triangulorum C Z X,* c *Z V) habebit eandem proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C* c *ad* c *Z eandem proportionem habebit, quàm C F ad F D, seu quàm habet latus*

9. 10. huius. *transuersum ad rectum, & propterea recta linea V Z est breuissima omnium, quæ ex V ad axim A D duci possunt.*

Iisdem prorsus verbis ostensum erit, quod recta linea l m *sit breuissima omnium cadentium ex puncto* l *ad axim, si nimirum apponãtur caracteres prioris casus, vt patet in secunda, & quarta figura.*

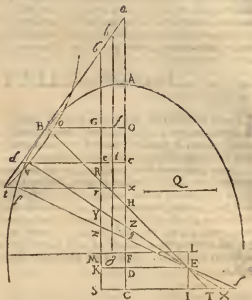
Iisdem positis ostendendum est, ramum B E, interceptum inter duos breuisecantes E V, non esse breuiseeantem, atque lineam breuissimam ex B ad axim A D extensam cadere supra ramum B E versus verticem A.

Quoniam rectangulum B G M maius est rectangulo o *G M, atque ostensum fuit rectangulum E M æquale rectangulo* o *G M; ergo rectangulum B G M maius est*

Lem. 5. *rectangulo E M, & propterea E K ad B G, seu K R ad R G (propter similitudinem triangulorum) minorem proportionem habet, quàm G M ad M K, & com-*

ponendo

ponendo eadem K G ad G R minorē proportionem habebit, quā ad K M, & propterea G R maior erit, quàm K M, vnde E I ad G R, seu I T ad G B (propter similitudinem triangulorum E I T, R G B) minorem proportionem habet, quàm E I ad K M, seu I C ad C S; & ideo comparando homologorū summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C T ad O B, siue C H ad H O (propter similitudinem triangulorū) habebit minorē proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C O ad O H habebit minorem proportionem, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum habet ad rectum; ergo breuissima ex B ad axim ducta eum secat supra punctum H, & abscindit lineam minorem, quàm A H.



Lem. 4.

Ex 9. 10. huius.

Rursus ijsdem positis, ostendendum est, ramum E p cadentem supra ramum E V versus verticem, vel infra infimum breuisecantem E V non esse breuisecantem, & abscindere ex axi minorem lineam, quàm abscindit breuissima ex puncto p ad axim ducta. Ducatur ex p recta linea p x perpendicularis ad axim, eum secans in x, & secans S M in r, & hyperbolen V o in t, pariterque ramus E p secet S M in z, & A F in q, atque I C in ſ. Quoniam hyperbole V o secat coniſectionem A B in V, & p ponitur supra V ad partes A; ergo t cadit extra ſectionem A B, & propterea t r maior erit, quàm p r; vnde rectangulum p r M minus erit rectangulo t r M; sed propter aſymptotos S M, M F est rectangulum t r M æquale rectangulo o G M, seu rectangulo E M, vt dictum est; ergo rectangulum p r M minus est rectangulo E K M, & propterea E K ad p r, seu K z ad z r (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habet, quàm r M ad M K, & componendo, eadē K r ad r z maiorē proportionē habet, quàm ad M K; ergo r z minor est, quàm M K; ideoque E I ad r z, seu I ſ ad r p (propter similitudinem triangulorum E I ſ, & r p z) maiorem proportionem habet, quàm E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad r x; ergo comparando homologorum summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C ſ ad x p, 12. lib. 2. Lem. 5. Lem. 4.

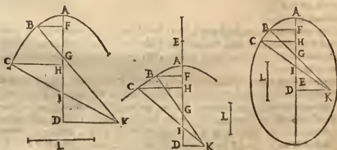
siue

siue C q ad q x (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habebit, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi, C x ad x q maiorem proportionem habebit, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum ad rectum, quapropter breuissima ex p ad axim Ex 9. 10. huius. *ducta secat maiorem lineam, quàm A q. Quæ omnia ostendenda fuerant.*

Notæ in Propos. LIV. LV.

ITaque ostensum est, vti memorauimus, quod ex concursu duarum breuissimarum ad illam sectionem non egrediatur alia breuisecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concursu educti ad sectionem habent proprietates superius expositas. a

Sensum germanum huius consectarij, in quo duæ propositiones Apollonij continentur, non est facile diuinare in tanta Apollonij breuitate, & textus Arabici insigni corruptione; videtur enim recensere, & recolligere conclusionem quamdam præcedentium propositionum; at hoc fieri nullo modo debebat in duabus propositionibus 44. & 45. Rursus si theoremata sunt, demonstrari non poterant ante propositiones 51. 52. 53; sed forsan numeri Arabici non 44. & 45; sed 54. & 55. esse debent, quod mirum non est, cum numeri passim in hoc codice Arabico deformati reperiantur. Itaque in hac ambiguitate suspicor, textum sic restitui posse.



PROP. 5. Addit. *Si in conisectione duæ breuisecantes ductæ fuerint ab eorum concursu, nullus alius ramus ductus erit breuisecans: Et ramorum ab eodem concursu extensorum, qui inter breuisecantes intercipiuntur, abscindunt axis segmenta maiora, & qui non intercipiuntur, minora, quàm abscindant lineæ breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ: oportet autem in ellipsi, vt duo rami, & perpendicularis cadant inter axis maioris verticem, & centrum sectionis.*

Sit

Sit conisectio A B C, cuius axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum
E; & sumantur qualibet duo puncta B, & C, qua in ellipsi sint in eodem eius
quadrante, & ducantur B F, C H perpendiculares ad axim, & in parabola
fiant F G, & H I aquales semissi lateris recti; at in hyperbola, & ellipsi fiat
E F ad F G, nec non E H ad H I, vt latus transuersum ad rectum, coniun-
ganturq; recta B G, & C I. Manifestum est B G, & C I esse lineas breuissimas,
qua si producantur vltra axim (ex 28. propositione huius libri) conuenient 8.9.10. huius.
alicubi, vt in K. Dico, quod ex concursu K nullus alius ramus breuisecans
duci potest ad sectionem A B C. Extendatur ex K super axim A D perpendi-
cularis K D, & reperiatur sectionis Trutina L competens mensura A D ipsius
concursus K, vt in propositionibus 51. & 52. pracipitur. Et certè perpendicu-
laris K D non erit maior, quàm L, aliàs duci non posset ramus vllus breui- 51.52. huius.
secans ex concursu K ad sectionem A B C, quod est falsum; facta enim fuerunt
K B, & K C breuisecantes; Similiter K D non erit aqualis Trutina L, quan-
doquidem tunc vnica tantummodo breuisecans ex K ad sectionem A B C duci
posset, quod rursus falsum est, posita enim fuerunt dua breuisecantes; igitur per-
pendicularis K D necessario minor erit Trutina L, & ideo ex concursu K dua 51.52. huius.
tantummodo breuisecantes ad sectionem A B C duci possunt, qua sunt B K, C K;
& propterea nullus alius ramus breuisecans ex concursu K ad sectionem A B C
duci potest prater duos K B, & K C; quod erat primo loco ostendendum.

Secundo ijsdem positis, dico, quod rami ducti inter K B, & K C cadunt infra
lineas breuissimas ab eorum terminis ad axim ductas, & quod rami producti ex
K supra breuisecantem K B versus A verticem sectionis, vel infra ramum bre-
uisecantem K C abscindunt axis segmenta ex vertice minora, quàm abscindant
linea breuissima ab eorum terminis ad axim ducta. Reperiatur denuo Trutina
L, ostendetur, vt prius perpendicularis K D minor, quàm L, & dua tantummo-
do breuisecantes K B, & K C; quare quilibet ramus ex K ad sectionis punctum,
inter B, C positum extensus, secat segmentum axis ex vertice A maius quàm ab- 51.52. huius.
scindat linea breuissima ab eius termino ad axim ducta: pariterque quilibet ra-
mus ex K ad punctum sectionis supra B, positum, vel infra ramum K C exten-
sus, abscindet segmentum axis ex A minus, quàm secet linea breuissima ab
eius termino ad axim ducta; quod erat ostendendum.

Notæ in Propoſit. LVI.

a REperitur quidem in ramis aggregati ſecantis bifariam inclinatum, ſuper quod non cadit perpendicularis, breuiſecans vna tantum, quomodocumque ſe habeant perpendicularis, & menſura, &c.

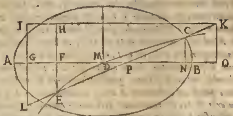
Sensum huius propositionis nec Apollonius quidem si reuiuisceret insigni barbarie corruptum perciperet, censeo tamen, sic restitui debere.

In ellipsi ramorum secantium vtrumque axim à concursu vltra centrum posito egredientium, vnius tantùm portio inter axim maiorem, & sectionem intercepta erit linea breuissima; siue mensura ipsam comparatam, nec non perpendicularis ipsam Trutinam superet, aquet, vel ab ea deficiat.

Sit

b

Sit sectio ellipsis A C B transuersa A B, &c. *Lego; Sit sectio ellipsis A C B, & axis maior A B, centrum D, & perpendicularis E F secans axim in F inter centrũ ellipsis D, & verticem A.*



Et ducamus per punctum E sectionẽ hyperbolicam E M C circa duas eius continentes, &c. *Idest circa duas asymptotos I L, I H per* c

12. & 13. lib. 2. *E describatur hyperbole E M C, quæ secet axim A B æquidistantem alteri asymptoton in aliquo puncto vt in M; ostendetur punctum M super ellipsis centrum D cadere.*

Ergo E H prima in proportione in I H subsequentem, nempe G F subsequens ipsam M G quartam, æquale est subsequenti D G secundæ in I G nempe F H tertiam. Ergo punctum N, &c. *Textus corruptus sic restitui posse censeo; Ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam æquale est D G secundæ in I G, nempe F H tertiam, &c. Propterea quod E H ad F H, atque D G ad G F posita fuerunt, vt latus transuersum ad rectum; ergo rectangulum sub D G, & H F, seu I G, extremis quatuor proportionalium, æquale est rectangulo sub intermedijs E H, & F G, seu H I, estque punctum E in hyperbola E M C cuius asymptoti K I, L I; ergo punctum D in eadem hyperbola existit; sed erat prius in ellipsis diametro A B, scilicet in centro; quare in eorum communi sectione existet: erat autem punctum M communis sectio hyperboles E C, & axis ellipsis A B; igitur puncta M, & D coincidunt, & hyperbole E D C* d

8. lib. 1. *transit per centrũ sectionis ellipticæ A C B, & ideo hyperbole E D C, quæ in infinitũ extendi, & dilatari potest necessario secabit finitam ellipsim alicubi, vt in C.*

Et producamus per E C lineam, &c. *Et producamus per E C rectam lineam, quæ occurrat continentibus in L, K, & secet axim ellipsis in P.* e

Erit G F æqualis O N, quare F O, &c. *Quia duæ rectæ lineæ A O, L K secantur à parallelis I L, F E, C N, K O proportionaliter, & sunt K C, L E* f

8. lib. 2. *æquales, ergo O N, F G inter se æquales erunt, & addita communiter N F erit F O æqualis N G; Et quoniam E H ad H F est vt E K ad K P (propter parallelas K I, O A) nempe vt F O, seu ei æqualis G N ad O P (propter parallelas E F, O K) sed eandem proportionẽ habet D G ad G F, quàm E H ad H F; ergo G N ad O P eandem proportionem habet quàm D G ad G F, & comparando*

Lem. 3. 10. huius. *homologorum differentias D N ad N P erit vt D G ad G F, seu vt latus transuersum ad rectum; & ideo C P est breuissima.*

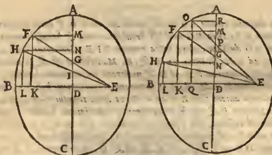
Quia in sequenti propositione 57; & in alijs adhibetur propositio non adhuc demonstrata; nimirum posita C P linea breuissima, pariterque I D semissi axis recti minoris etiam breuissima (ex 11. huius) quæ occurrant vltra axim in M deducuntur ea omnia, quæ in propositionibus 51, & 52. ex hypothesi omnino diuer-

no diuersa eliciebantur; nam in dictis propositionibus perpendicularis ex concursu ad axim ducta efficiebat in ellipsi mensuram (iuxta definitionem 15. huius libri) minorem medietate axis transuersi, idest perpendicularis ex concursu cadebat inter centrum sectionis, & proximiorem verticem: hic vero perpendicularis ex concursu M per centrum D ellipsis transit.

Animaduertendum est hoc theorema demonstratum fuisse ab Apollonio Propos. 35. huius libri, quod tamen paraphrastes nescio an iure in fine huius voluminis transposuit; Sed quia predicta propositio 35. omnino hic est necessaria, & pendet ex alijs præcedentibus, libuit potius aliam independentem demonstrationem afferre quam ordinem propositionum satis alteratum denuo perturbare.

LEMMA VIII.

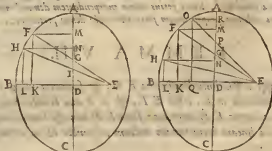
IN ellipsi ABC linea breuissima F G, & semiaxis minor rectus B D conueniant in E, erunt E F, & E B duæ breuisecantes, ducatur quilibet ramus E H inter eos: Dico E H non esse breuisecantem, & cadere infra lineam breuissimam ductam ex puncto H ad axim.



Ducantur ex F, & H recta F K, H L perpendiculares ad axim rectum B D eum secantes in K, & L, pariterque ducantur F M, H N perpendiculares ad axim transuersum A D eum secantes in M, N. Et quia F G est breuissima, ergo D M ad M G eandem proportionem habet, quàm latus transuersum C A ad eius latus rectum; sed propter parallelas D E, M F, est D M ad M G, vt E F ad F G, seu E K ad K D (propter parallelas G D, F K) quare E K ad K D eandem proportionem habet, quàm latus transuersum ad rectum, & diuidendo E D ad D K eandem proportionem habebit, quàm differentia lateris trauuersi, & recti ad latus rectum, est vero D L maior, quàm D K (cum H L parallela ipsi F K cadat inter punctum K, & B) igitur E D ad maiorem D L minorem proportionem habet, quàm ad D K, & propterea componendo E L ad L D minorem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum: est vero E H ad H I, 15. huius

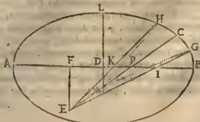
H vt E L

vt E L ad L D (propter parallelas I D, H L) pariterque D N ad N I est, vt E H ad H I (porpter parallelas F D, N H) quare D N ad N I erit vt E L ad L D, & propterea D N ad N I minorem proportionem habebit, quàm latus transuersum C A ad eius latus rectum, & ideo linea breuissima ex puncto H ad axim A D ducta cadet supra ramum H I E versus verticem A, atq; E H non erit breuisecans, quod erat primo loco ostendendum. 10. huius.



Secundo ducatur ramus E O secans maiorem axim in P inter verticem A, & breuisecantem E F; Dico E O non esse breuisecantem, & breuissimam ex puncto O ad axim A D ductam cadere infra ramum O P E; Ducantur O Q, O R perpendiculares ad axes, secantes eos in Q, R. Manifestum est Q D minorem esse, quàm K D, & propterea E D ad D Q maiorem proportionem habebit, quàm ad D K, & componendo E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm E K ad K D: ostensa autem fuit E K ad K D, vt latus transuersum C A ad eius latus rectum; igitur E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum; sed (propter parallelas P D, O Q) vt E Q ad Q D ita est E O ad O P, & propter parallelas E D, R O, vt E O ad O P, ita est D R ad R P; ergo D R ad R P est, vt E Q ad Q D, & propterea D R ad R P maiorem proportionem habebit, quàm latus tranuersum C A ad eius latus rectum; igitur E O non erit breuisecans, & breuissima ex puncto O ad axim ducta cadit infra ramum E O versus D, quod erat ostendendum. ex 10. huius.

Notæ in Propos. LVII.



g

ET dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, &c. *Idest sit rursus linea breuissima C M, quæ producta concurrat cum perpendiculari E F in E, quæ secet axim in F vltra centrum D ad partes verticis A. Dico, quod præter ramum*

mum E C nullus alius ramus breuiſecans ex concurſu E ad ſectionem duci poteſt, qui cadat in eodem quadrante B L, quem breuiſecans interſecat.

h Nam ſi producantur E H, E G, &c. *Ducantur quilibet rami E H, E G ad vtraſque partes breuiſecantis E C intra quadrantem B L, qui ſecent D B in K, & I, & producatur per centrum D recta M D L perpendicularis ad axim B A, quæ ſecet ſectionem in L, & ramum E C in M.*

i Et quia iam productæ ſunt ex concurſu M duæ breuiſecantes, &c. *Quia C M breuiſſima ex hypotheſi occurrit ſemiaxi minori recto L D breuiſſima pariter (ex 11. huius) in M, ſequitur (non quidem ex 51. 52. huius, ſed ex lemmate 8. præmiſſo) quod linea recta ex M ad H coniuncta cadat infra breuiſſimam ex puncto H ad axim B A ductam; & coniuncta recta M G cadit ſupra breuiſſimam ex puncto G ad axim ductam.*

k Sed E H, & E G efficiunt abſciſſas oppoſito modo, &c. *Quia ab eodem puncto H ſectionis ducuntur tres rectæ lineæ H E, H M, & breuiſſima ex H ad axim B A ducta, quarum intermedia eſt H M, eo quod breuiſſima ex H ad axim A B cadit ſupra H M ad partes B, vt dictum eſt, & H E cadit infra H M ad partes A; ergo H E cadit infra breuiſſimam ex H ad A B ductam, & propterea E H non erit breuiſecans: Similiter breuiſſima ex G ad A B extenſa cadit infra G M ad partes A, vt dictum eſt; at E G cadit ſupra G M ad partes B; ergo E G cadit ſupra breuiſſimam ex G ad axim A B ductam, quare E G non eſt breuiſecans.* Lem. 8. Ibidem.



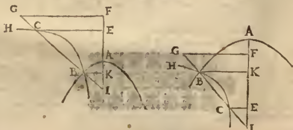
SECTIO NONA

Continens Propoſ. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. & LXIII.

IAm ex puncto dato C extra, vel intra ſectionem A B (quod in axi I A non ſit) poſſumus rectam lineam ducere, cuius portio intercepta inter ſectionem, & axim ſit linea breuiſſima. a

PROPOSITIO LVIII.

Sit ſectio parabole, & producamus perpendicularem C E ſuper I E A, & ponamus E F æqualem dimidio erecti, & du-
4. lib. 2. camus G F parallelam ipſi C E, & per C ducamus hyperbolen b
H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurat ſectioni A B in B, & per B, C producatur linea occurrens continenti I A in I, & continenti G F in G: Dico, quod B I eſt linea breuiſſima.

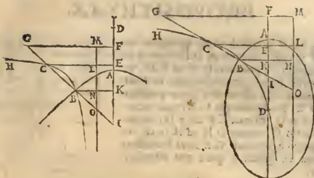


8. lib. 2. Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I æqualis eſt B G (sexta ex ſecundo) erit E I æqualis K F, & E F, K I erunt æquales, atque ſuppoſita, eſt E F æqualis dimidio erecti; ergo K I ita eſt pariter; Quare B I eſt breuiſſima, (octaua ex quinto) & hoc erat probandum. c

PROPOSITIO LIX. LXII. & LXIII.

DEinde ſit ſectio hyperbole, aut ellipſis, cuius centrum D, & lineis, atque ſignis in eodem ſtatu manentibus, ponamus D F ad F E, & a

ſimiliter



similiter C L ad L E, vt proportio figuræ, & producamus per L ipsam O M parallelam A I F, & per F ipsam G M parallelam C E, & faciamus sectionem H C B hyperbolen transeuntem per punctum C circa continentes G M, O M, quæ occurret sectioni A B (in ellipsi quidem vt demonstrauimus) in hyberbola vero eo quod O M parallela axi D A inclinato subtendit, si producatur, angulum subsequentem continentiæ angulum secabit A B, & corda, si producatur, occurret sectioni; Ergo O M ingreditur sectionem A B, & ampliatur sectio A B per extensionem longè à duabus lineis O M, M G, & sectio B C prope illas ducitur (decimosexta, ex secundo) igitur duæ sectiones A B, C B sibi occurrunt, vt in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem D F A in I, & G F in G; Et quia B O æqualis est ipsi C G (octaua ex secundo) erit O N æqualis ipsi M L, & O L ipsi N M; ergo O L, nempe N M, seu K F ad E I est, vt C L ad C E, nempe D F ad D E, ergo K F ad E I est, vt D F ad E D comparando homologorum summas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipsi, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I; vt D F ad F E, quæ est vt proportio figuræ; igitur B I est linea breuissima (9. 10. ex quinto) & hoc erat probandum.

4. lib. 2.

56. huius.

14. lib. 2.

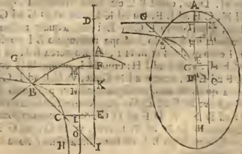
b

c

d

Lem. 3.

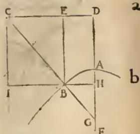
Lem. 1.



PROPOSITIO

PROPOSITIO LX.

Deinde perpendicularis egrediens ex C cadat ad centrum D sectionis A B hyperboles, & ponamus C E ad E D, vt proportio figuræ, & producamus ex E ad sectionem rectā lineam E B, quæ parallela sit D E, producaturque C B, quæ occurrat axi in G. Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, nempe D H ad H G est, vt proportio figuræ; erit G B linea breuissima (nona ex quinto) quod erat ostendendum.



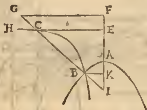
PROPOSITIO LXI.

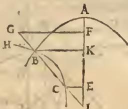
Sit postea punctum C, & perpendicularis C F, & F remotius à vertice sectionis, quàm sit centrum, & ponamus C E ad E F, vt est proportio figuræ, & similiter D G ad G F, & ex E producamus E H, quæ sit parallela ipsi F A, & ex G; D, ad illam G I, D K, quæ sint parallelæ ipsi C F; & ducamus sectionem hyperbolen
4 lib. 2. transeuntem per D, quam contineant I H, I G, quæ occurret sectioni A B similiter in B; Itaque per B, C producamus lineam, quæ occurrat axi F A in L, & ipsi E H in M. Dico, quod B L est linea breuissima. quia ducta perpendiculari H N, C E ad E F, seu ad K D, est vt D G ad G F, nempe vt K I ad I E, & propterea E C in E I erit æquale rectangulo D I subsequenti
12. lib. 2. (octaua ex secundo) nempe rectangulo B I consequenti. Ergo C E in E I est æquale B H in H I, & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E est, vt E I ad I H; ergo H I, nempe N G æqualis est E M, & ideo L F ad E M, nempe ad N G est, vt C F ad E C, nempe D F ad D G, quia quælibet earum assignata est, vt proportio figuræ; ergo L F ad N G est, vt D F ad D G; itaq; comparando homologorum differentias L D ad D N, vt D F ad D G; & per conuersionem rationis, & postea diuidendo D N ad N L erit, vt D G, ad G F, quæ est vt proportio figuræ; Ergo B L est linea breuissima (nona ex quinto) & hoc erat ostendendum.

Notæ

Notæ in Proposit. LVIII.

a IAm possumus producere ex puncto assignato C extra datam sectionem A B, aut intra (si punctum non fuerit ad axim I A) lineam diuidentem ex illo inter sectionem, & axim lineam breuissimam, &c. *Sic legendum puto. Ex puncto dato C extra, vel intra sectionem A B, quod in axi non sit, lineam rectam ducere, cuius portio intercepta inter sectionem, & axim sit linea breuissima.*





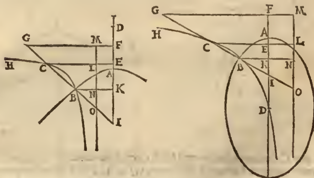
b Et per C ducamus sectionem H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat sectioni A B (16. ex 5.) in B, &c. *Scilicet ducamus per C hyperbolen H C B circa asymptotos G F, F I, & quia asymptoti, & hyperbole H C B producta ad se ipsas semper proprius accedunt, atque parabole A B producta semper magis ab axi A I remouetur; igitur hyperbole H C B, & parabola A B se mutuo secabunt; secent se se in puncto B. Animaduertendum est, quod in textu Arabico assumitur hæc conclusio, vt demonstrata in propositione 16. huius quinti libri; & siquidem numeri huius citationis mendosi non sunt, hæc propositio sexta decima desideratur in hoc libro.* 4. lib. 2. 14. 2. Ex 8. 1.

c Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I, &c. *Ex puncto B ad axim ducatur perpendicularis B K, secans eum in K; quoniam quando punctum C ponitur intra parabolen, tunc B G æqualis est I C; quando vero cadit extra, tunc C G est æqualis B I, & addita communi B C erit I C æqualis B G, cumq; duæ rectæ lineæ I G, I F conuenientes in I secentur à rectis lineis K B, E C; F G inter se parallelis, eo quod sunt perpendiculares ad eundem axim; ergo I G, & I F secantur in iisdem rationibus, & propterea E I æqualis erit K F; sicuti I C æqualis erat B G, pariterque I K æqualis erit E F, sicuti I B æqualis erat C G; posita autem fuit E F æqualis semierecto; igitur K I semissi lateris recti pariter æqualis erit.* 8. lib. 2.

Notæ

Notæ in Proposit. LIX. LXII. & LXIII.

ET lineis, atque signis eodem statu manentibus, &c. *Idest punctum C extra, aut intra sectionem ponatur, dummodo non sit in axi, ducaturq;* a
C E perpendicularis ad axim, secans eum in E, & vt latus transuersum ad re-
ctum, ita fiat D F ad F E, atque C L ad L E, & per L producatur O L M pa-
rallela A I, & per F ducatur F M G parallela C E, quæ secet O M in M, & per
4. lib. 2. *C describatur hyperbole H C B circa asymptotos G M O, quæ in ellipsi per eius*
centrum D transibit, & ideo eam secabit sicuti ostensum est in 56. huius.



Eo quod O M parallela axi D A inclinato subtendit, &c. *Quoniam* b
in hyperbola O M parallela axi secat vtrãque linearum continentium angulum,
11. lib. 2 *qui deinceps est ei, qui hyperbolen continet sectioni occurret, & producta sectio-*
nem A B secabit, & ideo O M cadit intra sectionem A B, atque hyperbole A B
producta semper magis, ac magis recedit tum ab M O parallela axi, cum ab M
14. lib. 2. *G parallela tangenti verticali, & sectio H C B, & asymptoti O M G ad se ip-*
sas semper propius accedunt, igitur sectiones A B, B C conueniunt; secent se
se in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem axi in I, ipsi M O in O, &
M G in G.

Et quia B O æqualis est ipsi C G, &c. *Cum lineæ rectæ O M, O G se se-* c
cantes in O, secentur à parallelis E C, K B, F G proportionaliter, erit O N
æqualis M L, sicuti O B æqualis erat C G, & O L, æqualis erit N M, sicuti
8. lib. 2. *O C æqualis erat B G, cumque triangula O C L, & I C E sint similia propter*
parallelas O L, I E, erit O L ad E I, vt L C ad C E; est vero M N, seu F
K æqualis ipsi L O, igitur F K ad E I est, vt L C ad E C, sed ex constru-
ctione erat D F ad F E, vt C L ad L E, scilicet vt latus transuersum ad
Lem. 1. *rectum; ergo antecedentes ad summas terminorum in hyperbola, & ad*
eorumdem

eorundẽ differentias in ellipsi scilicet C L ad C E erit vt D F ad D E, & propterea K F ad E I erit, vt D F ad D E, & cõparando homologorum summas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipsi, K D ad D I erit, vt D F ad D E, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, seu vt latus transuersum ad rectum; igitur B I est linea breuissima. Lem. 3. Lem. 1. Ex 9. 10. huius.

d Si autem componamus proportionem in hyperbola deinde abscindamus, & reijciamus oppositum ab opposito in ellipsi, deinde inuertamus fiet K D ad K I, vt D F ad F E, &c. *Sed textum mendosum corrigi debere, vt supra factum est constat ex praecedenti nota.*

Notæ in Proposit. LX.

a DEinde sit perpendicularis ex C, &c. *Si ex puncto C extra hyperbolen posito perpendicularis ad axim ducta ad centrum eius D pertingat, duci debet pariter ex puncto C recta linea ad sectionem, cuius portio inter axim D F, & sectionem A B sit linea breuissima; fiat C E ad E D, vt latus transuersum ad rectum, & ex E ducatur E B parallela axi, secans hyperbolen in B, & ex B ducatur B H perpendicularis ad axim, secans eum in H.*

b Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, &c. *Quia propter parallelas B E, F D est C E ad E D, vt C B ad B G, & propter parallelas D C, H B, est D H ad H G, vt C B ad B G, quare D H ad H G erit, vt C E ad E D: posita autem fuit C E ad E D, vt latus transuersum ad rectum; igitur D H ex centro hyperboles ad H G eandem proportionem habet, quàm latus transuersum ad rectum, & propterea G B erit linea breuissima.* 9. huius.

Notæ in Proposit. LXI.

a SIt postea punctum C, & perpendicularis C F, &c. *Si à puncto C extra hyperbolen A B posito, C F perpendicularis ad axim efficiat F A segmentũ transuersi axis maius semisse eius D A, & ponantur C E ad E F, atque D G*

ad G F, vt latus tranuersum ad rectum, & ducatur ex E recta E H parallela F A, quæ secetur à rectis D K, G I ad axim perpendicularibus in K, & I, &
4. lib. 2. *per D ducatur hyperbole D B circa asymptotos H I G, occurret hyperbole A B (vt in Prop. 59. 62. 63. ostensum est) alicubi, vt in B, coniungatur recta linea B C, quæ occurrat axi in L, & ipsi E H in M, ducaturque ex B perpendicularis ad axim eum secans in N, & rectam E M in H. Dico, quod B L est linea breuissima.*

C E ad E F, nempe K D est, vt D G ad G F, &c. *Quoniam ex constru-* b
ctione C E ad E F, seu ad ei æqualem K D, in parallelogrammo D E, est vt D G ad G F, scilicet vt latus transuersum ad rectum, estque K I ad I E, vt D G ad G F propter parallelas D K, G I, F E; ergo vt prima C E ad secundam D K, ita est tertia K I ad quartam I E, & propterea rectangulum C E I sub extremis contentum æquale est rectangulo D K I sub intermedijs comprahenso;
12. lib. 2. *est vero rectangulum B I æquale rectangulo D I cum comprahendantur ab hyperbole D B, & asymptotis H I G; ergo rectangulum C E I æquale est rectangulo B H I; & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E (propter similitudinem triangulorum B H M, C E M) eandem proportionem habebit, quàm E I ad I H, & componendo eadem H E ad H I, atque ad E M eandem proportionem habebit; & ideo H I seu ei æqualis N G æqualis erit E M, quare eadem L F ad N G, atque ad E M eandem proportionem habebit; sed propter similitudinem triangulorum L C F, M C E est F C ad E C, vt F L ad M E, seu ad N G, & erat C E ad E F, necnon D G ad G F in eadem propor-*
Lem. 1. *tione lateris transuersi ad rectum, & summa terminorum ad antecedentes terminos, scilicet F C ad E C, necnon F D ad D G eandem proportionem habent; quare L F ad N G eandem proportionem habet, quàm F D ad D G, & compa-*
Lem. 3. *rando homologorum differentias L D ad D N eandem proportionem habebit, quàm F D ad D G, & comparando conse-*
Lem. 1. *quentes ad differentias terminorum D N ad L N erit, vt D G ad F G, scilicet vt latus transuersum ad rectum;*
9. huius. *quapropter B L est linea breuissima.*

SECTIO

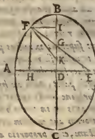
SECTIO DECIMA

Continens Propof. XXXXIV. XXXXV. Apollonij.

a SI ex axe recto ellipsis sumatur mensura ab origine, quæ ad semiaxim rectum non habeat minorem proportionem, quàm habet figura suæ transuersæ, tunc quicumque ramus secans, ab illa origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis lineam minorem ea, quàm abscindit linea breuissima egrediens ab eius termino in sectione posito ad transuersum axim; si vero fuerit proportio ad semirectum minor, tunc ramorum secantium vnus est breuisecans; reliqui vero, qui sequuntur extremum transuersæ habent proprietates superius expositas, & qui sequuntur extremitatem recti, secant ex transuersa lineam maiorem ea, quàm abscindit breuissima egrediens ab eius termino.

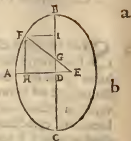
PROPOSITIO XXXXIV.

b Sit A D dimidium axis recti, & minoris sectionis ellipticæ A B C, & mensura A E, quæ sit maior, quàm A D, & proportio illius ad istam non sit minor proportione figuræ sectionis; Dico, quod linea breuissima egrediens ab extremitate cuiuscumque rami secantis educti ex E ad sectionem A B C, secat ex tranuersa B C cum vertice B, vel C lineam maiorem ea, quàm abscindit ille ramus.



c Ponatur ramus E F, & ducamus ex F ad vtrumque axim duas perpendiculares F H, F I. Et quia proportio E A ad A D non est minor proportione figuræ, sed minor est, quàm E H ad H D, nempe E F ad F G, seu D I ad I G, erit proportio figuræ minor, quàm D I ad I G, & ponamus D I ad I K, vt est proportio figuræ, & iungamus F K; erit ergo F K linea breuissima (10. ex 5.) & iam secat K B maiorem, quàm B G, & G F non erit breuissima; & hoc erat propositum. 10. huius.

PROPOSITIO XXXXV.



SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, ponamus E H ad H D in proportione figuræ, & producamus perpendicularem H F, & iungamus F E, & ducamus perpendicularem F I. Et quoniam E H ad H D, nempe D I ad I G est, vt proportio figuræ, erit F G linea breuissima (10. ex 5.) Et quoniam iam educti sunt ex E duo breuisecantes F E, & E A (11. ex 5.) tunc à terminis ramorum egredientium ex E, qui terminantur ad sectionem B F, linea breuissima egrediens erit remotior ab ipso B, & qui terminatur ad sectionem A F, breuissima egrediens ab extremitate illius erit proximior, ipsi B (51. 52. ex 5.) & hoc erat ostendendum. a b

Notæ in Propos. XXXXIV.

P*Vto, numeros 53. & 54. Propositionum huius sectionis mendosos esse, nam Propositio 53. posita fuit in præmissa sectione, & Propositio 54. inferius apposita reperitur; Censeo igitur, esse Propositiones XXXXIV. & XXXXV.*

Si ex axe recto ellipsis sumatur mensura, &c. *Hoc est si ex axe minori, recto ellipsis sumatur mensura, quæ habeat non minorem proportionem ad semiaxim rectum, quàm habet axis transuersus ad suum latus rectum, quilibet ramus secans, ab origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis minorem lineam, quàm secat linea breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Si vero mensura ad minorem semiaxim rectum proportionem minorem habuerit, quàm latus transuersum ad rectum, tunc vnicus ramus erit breuisecans; reliqui vero sequentes terminum transuersi, habent superius expositas proprietates, & sequentes extremitates axis recti, secant ex transuersa maiorem lineam, quàm secet breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Quod autem mensura necessario sumi debeat in axe minori ellipsis patet, nàm ex hypothesi rami sunt secantes non quidem ex concursu, sed ex origine ducti igitur origo cadit infra centrum, & mensura maior erit medietate axis vt in textu habetur; debet autem habere mensura ad semiaxim rectum maiorem aut eandem proportionem, quàm axis transuersus habet ad eius latus rectum, ergo proportio axis transuersi ad suum latus rectum erit maioris inæqualitatis, & propterea transuersus axis erit maior quàm axis rectus.* a

B
F
I
G
K
A
H
D
E
C

Sit

b Sit A D dimidium axis recti ſectionis ellipticæ A B C, &c. *Sit A D dimidium axis minoris, & recti ellipſis A B C, ſitque menſura A E maior, quàm A D, & E A ad A D habeat maiorem, aut eandem proportionem, quàm habet latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus.*

c Ponatur ramus E F, & producamus ex F, &c. *Ducatur quilibet ramus ſecans E F, & ex F ad vtrumque axim perpendiculares F H, F I, quæ ſecent eos in H, & I. Et quia D H minor eſt, quàm D A, habebit eadem E D ad D H maiorem proportionem, quàm ad D A, & componendo E H ad H D, maiorem proportionem habebit, quàm E A ad A D; eſt vero E F ad F G, vt E H ad H D (propter parallelas D G, H F) nec non D I ad I G eſt, vt E F ad F G (propter parallelas E D, I F) ergo D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm E A ad A D: habebat autem E A ad A D maiorem, aut eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus; igitur D I ad I G maiorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus: fiat iam D I ad I K, vt latus tranſuerſum B C ad eius latus rectum, iungaturque F K, erit I K maior, quàm I G, & F K linea breuiſsima, quæ ſecat ſegmentum axis K B maius, quàm B G, vnde E F non erit breuiſcans.* 10. huius.

Notæ in Propoſ. XLV.

a SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, &c. *Habeat E A ad A D minorē proportionem, quàm latus tranſuerſum B C ad eius rectum latus, & fiat E H ad H D, vt latus tranſuerſum ad rectum; habebit E H ad H D maiorem proportionem, quàm E A ad A D, & diuidendo eadem E D ad D H habebit maiorem proportionem; quàm ad D A; & propterea D H minor erit, quàm D A; vnde ex puncto H ſi eleuetur H F perpendicularis ad D A intra ſectionem cadet, & ſecabit eam alicubi, vt in F: ducatur poſteà ex F recta F E; quæ ſecet axim in G; & F I perpendicularis ad axim B C eum ſecans in I. Et quoniam, propter parallelas G D, F H, eſt E F ad F G, vt E H ad H D, pariterque, propter parallelas E D, I F, eſt D I ad I G, vt E F ad F G, quare D I ad I G eandem proportionem habet, quàm E H ad H D, ſeu quàm latus tranſuerſum B C ad eius latus rectum; & propterea F G eſt breuiſsima.* 10. huius.

b Et quoniam iam eductæ ſunt ex E duæ breuiſecantes, &c. *Textus Arabicus vſque ad finem propoſitionis eſt omnino corruptus, cum ſupponat propoſitionem non demonſtratam, vt in propoſitione 56. notaui; Itaque, ſic eum reſtitui poſſe cenſeo. Quoniam ex conſurſu E breuiſsima F G, & ſemiaxis recti minoris D A rami educti ad ſectionem F A ſecant axis ſegmenta vſque ad verticem B maiora, quàm abſcindant breuiſsimæ ab eorum terminis ad axim ducta, ſcilicet breuiſsimæ cadunt ſupra ramos (ex Lemmate 8. præmiſſo) ſimiliter rami ex concurſu E ad ſectionem B F ducti cadunt ſupra breuiſsimas ab eorum terminis ad axim extenſas (ex eodem Lemmate 8.) & hoc erat oſtendendum.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſ. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI. Apollonij.

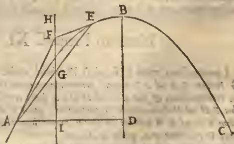
PROPOSITIO LXVIII. LXIX.

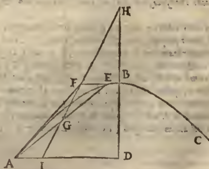
SI occurrant duæ tangentes alicui ſectioni A B C, vt ſunt A F, E F, vtique quod abſcinditur ex tangente proximiori vertici ſectionis, qui eſt B minus eſt ſegmento abſciſſo ex alia, nempe E F minor eſt, quàm A F. a

Iuncta enim A E, & in parabola ex F producta linea F I parallela axi B D erit illa diameter, bifariam ſecans E A in G (34. ex 2.) Similiter ex centro H producamus H F G, quæ eſt quoque diameter (34. ex 2.) bifariam ſecans E A in G, & ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim D B. Ergo angulus A I G in parabola eſt rectus, & in hyperbola obtuſus; ergo F G A erit obtuſus in illis omnibus; quare maior eſt, quàm angulus F G E, & A G æqualis eſt ipſi G E, & F G communis; igitur E F minor eſt, quàm F A. b

30. lib. 2.

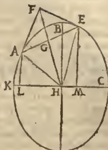
Ibidem.





PROPOSITIO LXX.

Postea in ellipsi iungamus E H, A H, & C sit extremitas axis recti; erit A H minor
c quàm E H (11. ex 5.) & angulus E G H, nempe A G F maior erit, quàm A G H, seu E G F, ergo E F minor est, quàm F A, & hoc erat propositum.



PROPOSITIO LXXI.

d Patet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L, & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate minor quoque est, quemadmodum demonstrauimus, & hoc erat ostendendum.

Notæ in Proposit. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI.

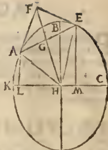
a SI occurrant duæ tangentes alicui sectioni A B C, aut circulo, vt sunt, &c. *Idest si coniſectionem A B C contingant duæ rectæ A F, E F in punctis A, & E concurrentes in F, erit portio tangentis inter occursum, & contactum vertici B proximiorem intercepta, minor ea, quæ inter occursum, & remotiorem à vertice contactum continetur: oportet autem in ellipsi B verticem esse axis maioris. Expungo verba*, aut circulo, *tanquam erronea, & incaute ab aliquo textui superaddita. Circulum enim tangentes ab eodem puncto ductæ inæquales esse nequeunt.*

b Et ducamus A D in parabola, & hyperbola, &c. *Et ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem super axim B D, secantem eum in D; atque G F H in I; cumque in parabola diameter F G I sit parallela axi B D, erit angulus A I G rectus æqualis interno, & opposito ad easdem partes, angulo D; in hyperbola vero cum triangulum H D I sit rectangulum in D, erit externus A I G obtusus, estque in triangulo G I A angulus externus A G F maior interno, & opposito A I G, recto in parabola, & obtuso in hyperbola; erit quoque angulus F G A obtusus in parabola, & hyperbola.*

c Et angulus E G H, &c. *Quia F H est diameter secans bifariam E A in G; ergo triangula E G H, & A G H habent duo latera æqualia E G, A G, & G H, commune; estque H E, vertici B axis maioris ellipsis propinquior, maior remotiore H A; ergo angulus E G H maior erit angulo A G H; estque angulus A G F æqualis E G H maiori, & E G F æqualis minori A G H; igitur angulus A G F maior est angulo E G F, & latera circa inæquales angulos sunt æqualia singula singulis, ergo tangens A F maior est, quàm E F.* 30. ex 2. Com. 11. huius.

Patet

Patet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L; & fuerit E M minor, exempli gratia, tune tangens educta ab eius extremitate, quæ est in sectione, minor quoque est, &c. *Si enim ex punctis E, A contactuum in ellipsi ducantur ad axim minorem K C perpendiculares E M, & A L secantes eum in M, & L, fueritque E M minor, quàm A L, tunc quidem punctum E magis recedit à vertice B axis maioris, quàm punctum A; & propterea, ex præmissa 70. huius libri, erit tangens E F minor, quàm A F. Expungo determinationem ab aliquo incaute additam* (quæ est in sectione) *manifestum enim est duci non posse contingentem ellipsim à perpendicularis termino M in axi minori posito, sed à termino E in sectionis peripheria constituto.*



d

SECTIO DVODECIMA

Continens XXIX. XXX. XXXI. Propos. Appollonij.

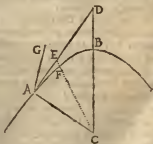
QVælibet linea recta A E D tangens sectionem aliquam A F B in A extremitate lineæ breuissimæ A C est perpendicularis super illam, nēpe D A C est angulus rectus. Et si fuerit perpendicularis super illam vtique tanget sectionem.

a

Alioquin producatur perpendicularis C E super A D, erit A C maior, quàm E C, ergo maior est, quàm F C; sed est minor, cū sit minor, quàm C F, quod est absurdum. Igitur angulus D A C, est rectus, quod erat ostendendum.

b

Si verò fuerit D A C rectus, erit A D tangens, alioquin sit tangens A G; ergo C A G erit rectus, sed erat C A D rectus, quod est absurdum; ergo A D est tangens, & hoc erat probandum.



Notæ

Notæ in Proposit. XXIX. XXX. & XXXI.

a ALioquin producatur perpendicularis C E, &c. *Existente C A linea breuissima, & A D tangente, si C A non est perpendicularis ad tangentem ducatur ex origine C recta C E perpendicularis ad tangentem A D, secans eam in E, & sectionem in F, erit in triangulo A C E angulus C A E acutus, & minor angulo recto E, & propterea C A subtendens maiorem angulum rectum, maior erit quàm C E, quæ acutum subtendit: cumque punctum E tangentis cadat extra sectionem, erit C F minor, quàm C E; ideoque C A multo maior est, quàm C F, quapropter C A non erit breuissima, quod est contra hypothesin.*

b Si vero fuerit D A C rectus, &c. *Quia C A supponitur breuissima, & angulus D A C rectus, erit A D tangens; nam si hoc verum non est, ducatur ex puncto A recta linea A G, contingens sectionem in A; secabit vtique tangens A G ipsam D A, & erit angulus C A G rectus nimirum contentus à breuissima C A, & tangente A G, ex proxime demonstrata propositione; ergo duo anguli recti C A D, & C A G æquales sunt inter se, pars, & totum, quod est absurdum.* 33. 34. lib. 2.



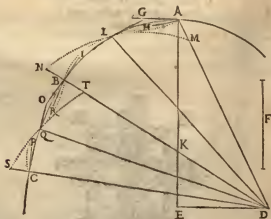
SECTIO DECIMATERTIA

Continens Propoſ. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. & LXXII. Apollonij.

PROPOSITIO LXIV. LXV.

SI ramorum ſecantium D C, D B, D A eductorum ex concurſu D ad ſectionem C A non fuerint duo breuiſecantes, vtique minimus eorum eſt, ramus terminatus D A, qui ambit cum axe A E angulum acutum; nempe D A E, & reliquorum propinquior illi minor eſt remotiore, ſcilicet D B maior, eſt quàm D A, & D C quàm D B.

Si vero inter illos fuerint duo breuiſecantes tunc vicinior vertici ſectionis eſt maximus ramorum, & maiori proximior, eſt maior, & minori propinquior eſt minor.



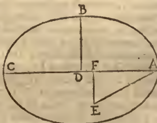
Producamus perpendicularem D E ſuper axim E A, & reperiatur Trutina F. Et primo loco nullus ramus ſit breuiſecans, iam ſi D B, non eſt maior, quàm D A, ſit æqualis illi, & ducamus duas perpendiculares A G, a

A G, A H super E A, & D A. Et quia A G tangit sectionem, cadet A H intra sectionem, & ducamus rectam B I tangentem sectionem in
b B. Quoniam ex D non educitur ad sectionem A C vllus breuisecans, 33. 34. lib. 1.
erit E A non maior dimidio erecti (49. 50. ex 5.) aut erit D E maior quàm F (52. ex 5.) Iis positis vtique linea breuissima ex B educta abscindit cum A ex axi lineam maiorem, quàm A K (49. 50. 51. 52. ex 5.) verùm linea breuissima continet cum tangente B I angulum rectum (29.
c 30. ex 5.) igitur D B I est acutus, quare si centro D, interuallo D B circulus describatur, tunc B I cadit intra circulum; & A H cadit extra id
d ipsum, quia est perpendicularis ad D A; igitur circulus secat conisectionem; secet eam in L, & iungamus L D, ducamusque L G sectionem 33. 34. lib. 1.
e tangentem. Patet (vt dictũ est) quod D L G sit acutus; ergo L G cadit intra circulum B L A, sed cadit extra, quod est absurdum; ergo B D non est æqualis ipsi A D. Neque minor illo esse potest; quia si secetur D M maior, quàm D B, & minor, quàm D A, & centro D, interuallo D M, circulus M L N describatur, tunc D N, nempe D M maior est,
f quàm D B, & propterea circulus N L M secat conisectionem. Subinde patebit (quemadmodũ demonstrauimus) quod D B non sit minor, quàm D A; igitur D B maior est, quàm D A.

g Postea dico, quod D C maior est, quàm D B; quia demonstrauimus, angulũ D B O esse obtusum, & patet, quod D C P est acutus, & procedendo trito iam itinere demonstrabimus, quod Q O necesse est, vt cadat intra circulum C Q B. Et quod si fuerit D C minor, quàm D B, aut æqualis, necesse est, vt Q O cadat intra circulum C Q B; sed cecidit extra, quod est absurdum; igitur D C maior est, quàm D B, & D B maior, quàm D A, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXVI.

IN sectione elliptica A B C, cuius axis maior A C eius centrum D, & D B dimidium recti, duci nequeat ex E ad quadrantem A B breuisecans, & producatur perpendicularis E F; Dico punctum F cadere inter D A.

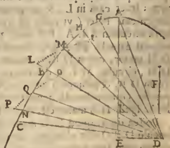


a Quia si caderet inter C, D duci posset ex E ad sectionem A B
b aliqua breuisecans (56. ex. 5.) quod est contra suppositionem. Deinde patet, quemadmodum demonstrauimus in parabola, & hyperbola, quod pr. 64. 65. huius.
E A minima sit linearum, & ramorum ad sectionem B A cadentium, & propinquior illi, minor sit remotiore, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LXVII.

POstea repetamus figuras, paraboles, & hyperboles, & quoquot sunt illius signa, & supponamus quod ipsius D B portio B K, sit tantummodo linea breuissima; Dico, quod D A quoque minima est linearum egredientium ex D ad sectionem A C, & illi propinquiores sunt minores remotioribus. a b

Quia educitur ex D vnus tantum breuisecans erit mensura E A maior dimidio erecti, & D E æqualis F Trutinæ (51. 52. ex 5.) vnde sequitur, quod lineæ breuissimæ eductæ ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt cum A ab axi lineas maiores, quàm secant illi rami. Ducamus prius ad sectionem B A ramum D G, inde constat D G maiorem esse, quàm D A (64. 65. ex 5.) Dico iam, quod D B maior est illa, alioquin esset æqualis, vel minor illa, & producamus D H ad sectionem B G; ergo D H maior est, quàm D G, quia remotior est ab D A (64. 65. ex 5.) quare maior est, quàm D B, & ex illo secetur D I maior, quàm D B, & minor, quàm D H, & centro D interuallo D I descriptus circulus secabit sectionem B G, secet eam in M, & iungamus D M; ergo D M, nempe D I, quæ concessa fuit maior, quàm D B est etiam maior, quàm D H, propterea quod est remotior ab D A, quàm D H (64. ex 5.) igitur D I maior est quàm D H, quod est absurdum; quare D B maior est, quàm D H. c d e

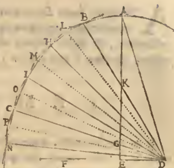


Patet etiam, quod D B minor sit, quàm D C, alioquin esset vel illi æqualis, aut maior, & ducamus D N ad sectionem C B; ergo D N minor est, quàm D C, eò quod proximior est D A (64. ex 5.) quare minor est, quàm D B, & secetur D O ex D B maior, quàm D N, & minor quàm D B, & centro D, interuallo D O circulus descriptus secabit sectionem exempli gratia, in Q, & iungamus D Q, igitur D Q minor est quàm D N, sed est æqualis D O, quæ supposita fuit maior, quàm D N, ergo D Q maior est, quàm D N; verum est minor illo, quod est absurdum; igitur D C non est minor D B, neque æqualis; quare maior illa est. Atque sic patet, quod D B minor sit omnibus lineis egredientibus ex D ad sectionem B C, & illi proximiores ex illa parte, minores sunt remotioribus. Quapropter manifestum est, quod D A sit minimus omnium ramorum egredientium ex D ad sectionem A B C, & reliqui proximiores illi, minores sunt remotioribus, quod erat ostendendum. f g

PROPOS.

PROPOSITIO LXXII.

SI eductæ fuerint ex D duæ
breuisecantes D C, D B,
quorum segmenta G C, B K
sint breuissima, & D B propin-
quior sit vertici sectionis; Di-
co, quod D B maximus est ra-
a morum egredientium ad sectio-
nem A B C, & minimus eorũ
D C, & ramorum egredientiũ
ad sectionem A C, qui D B
propinquiores maiores sunt
remotioribus, & propinquiores
D C (ex ramis egredientibus ad sectionem in ea parte) mino-
res sunt remotioribus.



Sit F Trutina, & quia iam ducti sunt ex D duo breuisecantes, ideo
E A excedit dimidium erecti, & D E minor est, quàm F (51. 52. ex 5.)
his positis, vtique lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus ramo-
rum qui sunt in sectione B C abscindunt ab axi E A minores lineas, quàm
abscindunt rami (51. 52. ex 5.) & qui ducuntur ab extremitatibus egre-
dientium ad reliquas sectiones abscindunt lineas maiores. Educamus ita-
que ramos D H, D I ad sectionem B C, & ducamus B L, L H M, & I
M tangentes sectionem in punctis B, H, I; quia B K est breuissima erit 29. 30.
I. B D angulus rectus, & quia breuissima egrediens ex H abscindit cum huius.
A ab axi E A lineam minorem, quàm secat D H erit L H D obtusus, & Ex 29. 30.
iungamus D L; igitur duo quadrata D H, H L minora sunt, quàm qua- huius.
dratum D L, quod est æquale duobus quadratis L B, D B; verum L B
minor est, quàm H L (68. ex 5.) ergo D B maior est, quàm D H. atq;
b sic patet, quod D H maior sit, quàm D I, quia D H M est acutus, & D Ibidem.
I M obtusus: & D I maior sit, quàm D C. Quare B D maximus est ra-
c morum egredientium ad B C, & iam demonstratum est, quod sit maxi-
mus ramorum egredientium ad B A (64. 65. ex 5.)
Ponamus postea N extra sectionem B C, & iungamus D N, itaque
linea breuissima egrediens ex N abscindit ab axi E A maiorem lineam, 51. 52.
d quàm secat D N; ergo tangens in N continet cum D N angulum acu- huius.
tum: postea ostendetur, quemadmodum hic dictum est, quod D C mi- Ex 29. 30. huius.
nimus sit reliquorum ramorum egredientium ad reliquas sectiones, & sit
minimus ramorum egredientium ad A C, quare manifestum est, quod
D B sit maximus ramorum, & D C minimus, & quod maioribus pro-
pinquiores sunt maiores remotioribus, & minoribus propinquiores, mi-
nores sunt remotioribus, quod erat ostendendum.

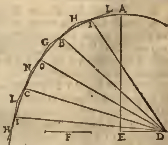
MONI-

MONITVM.

Antequam huius Decimætertiæ Sectionis explicationes, atque emendationes aggrediamur, vt Notæ breuiores, clarioresque reddentatur, & textus Arabici menda facilius corrigi possent, operæ pretium duximus (amice lector) Lemmata sequentia præmittere.

LEMMA IX.

Si ad conisectionem, atque ad vnum quadrantem ellipsis A B C à concursu D nullus ramus duci posit, qui sit breuisecans; Dico, quod quilibet secans ramus D B cum tangente H B G per eius terminum B ducta efficit angulum D B H ad partes verticis A acutum, & D B G, qui deinceps est, obtusum.



Quoniam nullus ramus ex concursu D ad sectionem A C ductus est breuisecans, erit (ex conuersa propositionis 49. 50. 51. 52. huius) mensura A E aut non maior semisse lateris recti, aut perpendicularis D E maior Trutina, quæ sit F, & ideo quilibet ramus secans D B cadit supra breuissimam ex puncto B ad axim ductam, est verò breuissima ex puncto B ad axim ducta
29. 30. huius *perpendicularis ad G B H tangentem sectionem in B; ergo angulus D B H, verticem A respiciens est acutus, & qui deinceps est D B G erit obtusus.*

LEMMA X.

Iisdem positis, si à concursu D vnicus tantum ramus D B breuisecans ad sectionem A B duci potest; Dico, quod quilibet alius ramus secans D I supra, vel infra breuisecantem D B positus efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, verticem respicientem, acutum, & D I H, qui deinceps est, obtusum.

Nam ex conuersa propositione 51. & 52. huius perpendicularis D E æqualis erit Trutinæ F, & ideo quilibet ramus D I positus supra, vel infra breuisecantē

(qui

(qui est D B) cadit supra breuissimam ex puncto I ad axim ductam, quæ perpendicularis est ad tangentem L I H, & propterea angulus D I L, verticem A respiciens erit acutus, & consequens angulus D I H obtusus. 51. 52. huius. 29. 30. huius,

LEMMA XI.

Iisdem positis, si à concursu D duo breuisecantes D C, D B ad sectionem A B duci possunt; Dico, quod quilibet ramus secans D I positus supra breuisecantem D B vertici proximiorem, vel infra infimum breuisecantem D C, efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, respicientem verticem A, acutum, & consequentem D I H obtusum, & quilibet ramus D O inter breuisecantes positus efficit cum recta G O N sectionem tangente in O angulum D O G verticem respicientem obtusum, consequentem vero D O N acutum.

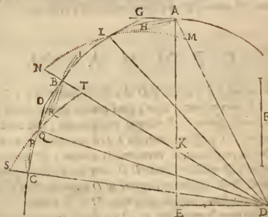
Quia (ex conuersa propositione 51. & 52. huius) perpendicularis D E minor esse debet Trutina F, & propterea quilibet ramus D I supra breuisecantem D B, vel infra breuisecãtem D C cadit supra breuissimam ex puncto I ad axim ductam, cum qua contingens L I angulum rectum constituit; ergo angulus D I L verticem respiciens, est acutus, & consequens D I H obtusus; Similiter quilibet ramus D O inter breuisecantes positus cadit infra breuissimam ex puncto O ad axim ductam, & cum illa sectionem contingens G O efficit angulos rectos, igitur angulus D O G verticem respiciens, est obtusus, & consequens D O N acutus. 51. 52. huius. 29. 30. huius. Ibidem.

Notæ in Propof. LXIV. & LXV.

Antea Apollonius docuit qui nam rami ab origine ad conisectionem ducti essent minimi, & quo ordine reliqui rami se se excederent, modò agit de ramis axim secantibus à concursu ductis, & quærit qui minimus, & qui maximus sit, & quo ordine disponantur.

a Producamus perpendicularem D E super axim, &c. *Si nullus ramus breuisecans à concursu D ad sectionem A C duci potest; Dico, quod ramus terminatus D A est minimus omnium ramorum secantium D B, D C, & propinquiores vertici A minores sunt remotioribus; ducatur D E perpendicularis ad axim eum secans in E, & reperiatur Trutina F. Et siquidem D A non est minor quolibet alio ramo secante D B infra ipsum posito erit æqualis, aut maior illo; sitque prius D A æqualis D B, si fieri potest, & ex puncto A verticis ducatur A G perpendicularis ad axim A E, quæ continget sectionem in A, pariterque ducatur recta A H perpendicularis ad ramum A D inclinatum ad axim;* 17. lib. 1. 32. pr.

& quia



& quia A H cadit infra A G ad partes axis cum D A, ad quam illa perpendicularis est, extendatur vltra axim A E, nec possit inter tangentem A G, & sectionem conicam A B, aliqua recta linea intercipi; igitur A H cadit intra conisectionem, & angulus E A H est acutus.

Quoniam ex D non educitur ad sectionem A C vllus breuisecans, &c. *Sequitur quidem ex hac hypothesi, quod mensura E A non sit maior semierecto aut si maior est, sit quoque perpendicularis D E maior Trutina F, ex conuersa propositione 51. 52. huius per deductionem ad inconueniens.* b

Ex 49. 50. huius.

Quare si centro D interuallo D B, &c. *Circulus enim B I L H A radio D B descriptus transibit per verticem A cum radius D B positus sit aequalis D A, eumque angulus D B I sit acutus, ex Lemmate nono, cadet necessario B I intra circulum B I L.* c

Igitur circulus secat conisectionem, &c. *Quia B I cadit extra conisectionem, quam tangit, & intra circulum B L A, vt dictum est, è contra recta A H cadit intra eandem conisectionem, & extra ipsum circulum, quem tangit, cum H A perpendicularis sit ad circuli radium D A; igitur circulus B I L A fertur extra conisectionem ad partes B I, & intra eandem ad partes A H; quare necessario conisectionem secat.* d

Patet, vt dictum est, quod D L G sit acutus, &c. *Hoc enim sequitur ex nono Lemmate præmisso, respicit enim angulus D L G verticem A; & ideo est acutus, & cadit necessario recta L G intra circulum B L A radio D L descriptum ad partes L A; & portio circuli L H A cadit intra conisectionem L A; igitur recta L G cadit intra conisectionem L A, sed cadit extra candem sectionem, cum contingat eam in L, quod est absurdum.* e

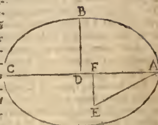
35. 36. lib. 1.

Deinde

f Deinde patebit, quemadmodum demonstrauimus, &c. *Quia D M facta est maior, quàm D B, & minor quàm D A, estque circuli radius D N æqualis D M; ergo punctum M cadit intra coniſectionem, N vero extra ipsam; & propterea circulus M L N ſectionem conicam ſecabit alicubi, vt in L, & portio circuli M L intra coniſectionem A L incidet: rurſus ducatur radius D L, & L G coniſectionem tangens in L erit, vt priùs angulus D L G acutus; & ideo L G cadit intra circulum L M, & propterea intra coniſectionem* 33. 34. lib. 1. *A L, ſed eadem L G cadit extra ipſam, quia eam contingit in L, quod eſt abſurdum; quare ramus D A non eſt maior, quàm D B; ſed prius neque illi æqualis erat; igitur ramus terminatus D A minor eſt quolibet ramo ſecante D B infra ipſum poſito, & propterea minimus erit omnium ſecantium.*

g Poſtea dico, quod D C maior eſt, quàm D B, &c. *Demonſtratio ſecundæ partis huius propoſitionis, quàm Apollonius innuit (quia conſtructione, ac progreſſu ſimili ſuperiori perfici poteſt) hac ratione reſtituitur. Demonſtrandum eſt quemlibet ramum D B vertici A proximiorem eſſe minorem quolibet ramo D C remotiore. Ducantur recta C P contingens ſectionem in C, & O B tangens ſectionem in B, & recta B R perpendicularis ad ramum D B; & ſi quidem ramus D C non concedatur maior, quàm D B, ſit primo ei æqualis, ſi fieri poteſt, & centro D interuallo D C deſcribatur circulus C P R, qui tranſibit per punctum B, ob æqualitatem radiorum D C, D B; & quia (ex Lemmate nono) angulus D C P verticem reſpiciens, eſt acutus, recta C P cadet intra circulum C P R; ſed cadit extra coniſectionem, cum ſit contingens; igitur portio circularis peripheriæ C P ducitur extra coniſectionem C Q B: rurſus, quia angulus D B O eſt obtuſus (ex nono Lemmate, cum verticem A non reſpiciat) ergo R B perpendicularis ad D B cadit intra coniſectionẽ, cum B O poſita ſit eã contingens: cadit verò eadem B R extra circulum B R Q, cum ſit perpendicularis ad circuli radium D B; igitur circuli portio B R intra coniſectionem cadet: ſed priùs eiuſdem circuli portio C P extra eandem ſectionem ducebatur; igitur idem circulus ſecat coniſectionem alicubi, vt in Q, ducaturque denuo ramus D Q, & Q O contingens ſectionem in Q; Vnde (ex nono Lemmate)* 33. 34. lib. 1. *angulus D Q O erit acutus; & propterea recta Q O intra circuli portionem Q R conſtituta intra coniſectionem cadet, quod eſt abſurdum; recta enim Q O extra coniſectionem Q A cadit, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C æqualis eſt ipſi D B. Sit ſecundò D C minor, quàm D B (ſi fieri poteſt) ſeceturque D T minor quàm D B, ſed maior quàm D C; & centro D interuallo D T deſcribatur circulus T Q S; is quidem ad partes B cadet intra, ad partes vero C extra coniſectionem; & propterea eam alicubi ſecabit, vt in Q; & ducto ramo D Q, & Q O contingente ſectionem in Q, erit angulus D Q* Lem. 9. *O acutus, & ideo recta Q O cadet intra circulum T Q, & propterea intra coniſectionem, quod eſt abſurdum; Q O enim cadit extra ſectionem Q A, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C minor eſt, quàm D B, ſed neque æqualis priùs oſtenſus fuit; igitur quilibet ramus D B vertici A propinquior minor eſt quolibet ramo remotiore D C, quod erat oſtendendum.*

Notæ in Propoſ. LXVI.

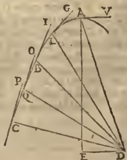


QVia ſi caderet inter C, D duci poſſet, &c. *Quotieſcumq; enim perpendicularis E F cadit ſuper centrũ D, vel ſecat ſemiaxim D C inter D, & C, tũc ex concurſu E vnicus ramus breuiſecans duci poteſt ad ſectionem B A, qui nimirum ca-* 45. 56. huius. *dit inter verticem remotiorem A, & axim minorem D B: ſed ex hypotheſi nullus ramus ex concurſu E ad quadrantem ellipſis A B duci poteſt, qui ſit breuiſecans; igitur perpendicularis E F ſecat ſemiaxim A D in puncto F poſito inter A, & D.*

Deinde patet, quemadmodum demonſtrauimus in vtraque hyperbola, &c. *Permuto particulam [vtraque] vt manifeſtè erroneam, legi enim debet in parabola, & hyperbola. Quod vero ramus terminatus E A minimus ſit omnium ramorum ſecantium manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſitionis 64. 65., quæ comprahendit etiam ellipſim, quando menſura F A minor eſt ſemiaxi A D, vt ex propoſitione 52. patet. Et ſimiliter ramorũ ſecantium ex concurſu E ad ſectionem A B ductorum propinquiores vertici A minores ſunt remotioribus ex eadem demonſtratione 64. 65. huius.*

Ex demonſtratione præmiſſa propoſitionum 64. & 65. deduci poteſt conſectarium, à quo notæ ſubſequentes breuiores reddantur.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXIV. & LXV.



SI in aliqua peripheria cuiuslibet coniſectionis omnes rami ſecantes, qui à concurſu duci poſſunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis conſtituunt angulos, qui verticem reſpiciunt, acutos; rami proximiores vertici ſectionis minores erunt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propoſitionibus 64. & 65., omnes rami D A, D L, D B, D Q, D C, & reliqui omnes, qui duci poſſunt ex concurſu D ad ſectionem A B C efficiunt cum tangentibus ſectionẽ à terminis A, L, B, Q, C angulos, verticem A reſpicientes, acutos, vt ſunt

ſunt D A V, D L G, D B I, D Q O, D C P, oſtenſus eſt ramus D A minor quàm D B, & D B propinquior vertici A, minor ramo D C remotiore.

Notæ in Propoſ. LXVII.

a POſtea repetamus figuram vtrãque hyperboles, &c. *Lego; Repetamus figuras paraboles, & hyperboles, & ſupponantur denuo eadem linea adducta ex concurſu D ad ſectionem; & perpendicularis D E, atque Trutina F, & omnium ramorum ſecantium vnicus tantummodo D B ſit breuiſecans.*

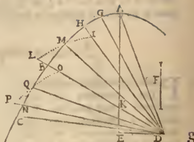
b Et illi propinquiores ſint maiores remotioribus, &c. *Sed mendosè; legi debet: Et illi propinquiores ſint minores remotioribus.*

c Quia educitur ex D vnus tantum breuiſecans, &c. *Legi debet. Quia educitur ex concurſu D vnus tantum breuiſecans, erit menſura E A maior dimidio erecti, & D E perpendicularis ad axim aqualis erit Trutina F.* Conuerſ. 51. 52. huius.

d Inde conſtat D G maiorem eſſe, quàm D A, &c. *Quia ex concurſu D ad ſectionem A C vnicus ramus D B breuiſecans ſupponitur igitur omnes rami cadentes inter A, & B præter infimum D B conſtituunt cum tangentibus ſectionem, ab eorum terminis ductis, angulos reſpicientes verticem A acutos; & propterea ramus terminatus D A minor eſt quolibet ramo D G infra ipſum, & ſupra ramum D B poſito; atque ramus D G minor eſt quolibet alio à vertice remotiore ducto ex D ad peripheriam A B. Dico iam, quod ramus D B maior eſt quolibet ramo D G, poſito infra verticem A, & ſupra breuiſecantem D B; Si enim hoc verum non eſt, erit D B aqualis, aut minor, quàm D G, & tunc ducto quolibet ramo D H ad ſectionem G B infra ramum D G, erit D H remotior à vertice A maior propinquiore D G, & propterea ramus D B adhuc minor erit ramo D H.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius. Ibidem.

e Ergo D M nempe D I, &c. *Quia D M, vt remotior à vertice A, eſt maior, quàm propinquior D H eſt vero D L, atque D I aqualis D M cum ſint radij eiuſdem circuli; ergo D I portio maior eſt, quàm totum D H, quod eſt abſurdum; quare D B maior eſt quolibet ramo D G infra verticem A, & ſupra ramum D B poſito; & propterea D B multo maior erit, quàm D A.* Ibidem.

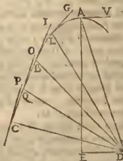
f Ergo D N minor eſt, quàm D C, &c. *Dubitare quis poſſet, an ramus D N, quia propinquior eſt vertici A ſit minor remotiore ramo D C, vt in propoſitione 64. & 65. verificabatur; & ratio eſt, quia hypotheſes ſunt diuerſa, nam ibi nullus ramus breuiſecans à concurſu D ad ſectionem A C duci poſſe ſupponebatur, in hac vero propoſitione 67. ponitur vnicus breuiſecans D B, at ſcrupulus omnis tolletur, ſi dicatur, non quidem ex propoſitionibus 64. & 65. ſed ex demonſtratione ibi allata, ſeu ex Corollario in fine notarum appoſito, propo-*



propositum deduci, nam duo rami D C, & D N positi infra singularem Lem. 10. *breuisecantem D B efficiunt cum rectis tangentibus sectionẽ angulos verticem respicientes acutos; igitur vt in secunda parte propositionum 64. & 65. demonstratum est, erit ramus D N vertici propinquior minor remotiore ramo D C.*

Et centro D, interuallo D O circulus descriptus secabit sectionem exempli gratia in Q (56. ex 5.) & iungamus, &c. *Videtur omnino expungenda citatio in textu apposita; (56. ex 5.) nam circulum O Q manifestum est, secare conisectionem alicubi, vt in Q, cum radius D O positus sit minor D B, & maior D N; postea, quia D Q propinquior est vertici A, quàm D N, & omnes rami à D ad peripheriam sectionis N Q ducti, efficiunt cum suis tangentibus angulos, verticem respicientes, acutos; igitur D Q minor est, quàm D N, quod est absurdum; posita enim fuit D O, seu ei aequalis D Q, & D P maior, quàm D N.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXVII.



Angulorum à ramis secantibus, qui à concursu ad conisectionem duci possunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis comprehensorum, si vnus tantum rectus fuerit, reliqui omnes verticem respicientes acuti; rami proximiores vertici sectionis, minores erũt remotioribus.

Ex eo enim, quod in propositione 67. omnes rami D A, D L, D C, & reliqui omnes, qui duci possunt ex concursu D ad sectionem A B C, cum tangentibus sectionem à terminis A, L, C comprehenderunt angulos verticem respicientes D A V, D L G, D C P acutos, & tantummodo vnus D B I rectus fuit ostensus est ramus D A minor, quàm D L; & D L vertici A propinquior, minor, quàm D B, atq; D B minor quolibet remotiore D C.

Notæ

Notæ in Proposit. LXXII.

a ET minimus eorum D C, &c. *Textus videtur mendoſus ; nam vt inferius oſtendetur, ramus breuiſecans D C à vertice remotior, non ſemper minimus eſt omnium ramorum cadentium ex concurſu D ad ſectionem A B C ; itaque legendum puto ; D C eſt minimus ramorum cadentium ad peripheriam ſectionis B C N ; quod manifeſtè indicatur ex determinatione in fine propoſitionis appoſita ; inquit enim : propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad ſectionem in ea parte) minores ſunt remotioribus, vbi conijcitur, Apollonium noluiſſe pronũciare, ramum D C minimum eſſe omnium, qui in ſectione A C N duci poſſunt, neque propinquiores D C minores eſſe quolibet remotiori ad partes verticis A conſtituto, ſed tantummodo eorum, qui in ſectione C B, & in inferiori C N ducuntur minimum eſſe D C, & ei propinquiores minores eſſe remotioribus.*

b Atque ſic patet, quod D H maior ſit, quàm D I, &c. *Ex vndecimo enim Lemmate angulus D H M eſt acutus, & D I M obtuſus, & coniunctæ D M erunt duo quadrata D H, H M maiora quadrato D M, quæ ſubtendit angulum acutum; quadratum verò D M maius eſt duobus quadratis D I, I M, ergo multo magis duo quadrata D H, H M ſimul ſumpta maiora ſunt duobus quadratis D I, I M ſimul ſumptis, & auferatur ex aggregato maiori quadratum minus H M, & ex minori tollatur quadratum maius I M (cum contingens H M propinquior vertici A minor ſit remotiore M I) remanet quadratũ D H maius quadrato D I, & propterea ramus D H maior erit ramo D I, & ſimili modo ramus D I maior oſtendetur ramo D C.* 68. 69. huius.

c Et iam demonſtratũ eſt, &c. *Scilicet : quia omnes rami ex D ad peripheriã A B ducti efficiunt cum ſuis tangentibus angulos verticem reſpicientes acutos; & propterea ramus D B maior erit quolibet alio ramo inter B, & A ducto; ideoque D B erit maximus cadentium in peripheria A B.* Lem. 11 Coroll. 64. 65. huius.

d Poſtea oſtendetur, quemadmodum hic dictum eſt, &c. *Textus eſt valde corruptus ; ſic reſtituendum puto ; Oſtendetur, quemadmodum ſupra dictum eſt, (ſcilicet in ſecunda parte propoſ. 67.) quod D C minimus ſit omnium ramorum ad ſectionem infimam C N cadentium, & vt hic oſtenſum eſt, ſit minimus ramorum egredientium ad ſectionem B C ; quare patet, quod D B ſit maximus ramorum cadentium ad ſectionem A C, & D C ſit minimus cadentium ad ſectionem B C N, & quod propinquiores maioribus, ſunt maiores remotioribus in peripheria ſectionis A C, & propinquiores minoribus, ſunt minores remotioribus in peripheria ſectionis B C N, & hoc erat oſtendendum.*

Quod

Quod autem infimus ramus breuisecans D C non sit necessario minimus omnium ramorum cadentium ad peripheriam sectionis A B, modò ostendetur.

PROB.6. Addit. *In conisectione duos ramos breuisecantes, ducere, quorum infimus maior sit ramo secante posito in peripheria à vertice, & suprema breuisecante comprehensa: oportet autem in ellipsi, vt rami secantes ad vnum eius quadrantem ducantur à concursu, inter axim minorem, & verticem collocato.*

In conisectione A B C, cuius vertex A axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum E ducatur qualibet breuissima F B: postea secetur F G ex axi, ita vt punctum G non cadat supra verticem A, seceturque F H non maior, quàm F G, ducanturque rectæ H C, G G parallelæ ipsi F B occurrentes sectioni in C, & G, coniungaturque recta C G secans F B in I: patet, C I maiorem non esse, quàm I G; propterea quod G C, G H à parallelis secantur proportionaliter; Deinde ex C ducatur alia breuissima C K, occurrens B F vltra axim in L, iungaturque ramus G L: ostendendum est L C maiorem esse, quàm L G. Secetur C G bifariam in M, atque per M ducatur sectionis diameter M N parallela axi in parabola, & per centrum exstensa in reliquis sectionibus, occurrens sectioni in N, ducaturque O N sectionem contingens in N, iunganturque L M, & L N, quæ secet G C in P. Quoniam G I æqualis, aut maior est, quàm I C, cadet punctum M bipartitæ diuisionis totius C G, vel in I, vel inter I, G, & in vtroque casu punctum N cadet inter G, & B (eo quod diameter M N parallela axi in parabola, aut ex centro E educta in reliquis sectionibus efficit angulum N M L ad partes verticis A) & ideo ramus L N cadens supra duos breuisecantes L C, L B ad partes verticis efficit cum tangen-

8. 9. 10. huius.

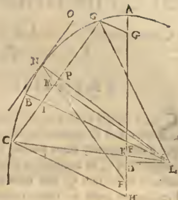
8. 9. 10. 26.17.28. huius.

33. 34. lib. 1.

te O N

te O N angulum acutum L N O verticem A respicientem; estque G C ordinatim applicata ad diametrum N M parallela tangenti verticali O N; ergo. angulus L P G externus aequalis erit angulo L N O interno, & opposito, & ad easdem partes constituto; & ideo angulus G P L acutus quoque erit, at in triangulo P M L angulus internus L M P, & oppositus minor est externo L P G acuto; igitur angulus L M P acutus pariter erit, & L M C obtusus; suntq; in triangulis L M G, & L M C circa angulos inaequales, latera G M, M C aequalia, & L M commune; ergo L C maior est, quàm L G, quod erat faciendum.

Lem. 11. 5. lib. 2.



E contra fieri potest, vt infimus breuisecans ramus L C aequalis, aut minor sit ramo aliquo supra breuisecantem reliquum B L posito. Nam L C minor est, quàm B L, & maior effici potest ramo non vltra sectionis verticem A collocato ex prima parte huius propositionis; sed rami à concursu L educti cadentes inter puncta A, & B successiuè augentur quo magis à vertice A recedunt; Ergo ramus L C aequalis, aut minor erit aliquo ramo ab eodem concursu L educto inter puncta A, & B cadente; igitur manifestum est ramum breuisecantem C L infimum duorum breuisecantium, non esse semper minimum omnium ramorum cadentium ex concursu L ad peripheriam sectionis A B C, sed tantummodo minorem esse eorum, qui inter duo breuisecantes B L, C L cadunt, & reliquorum infra ramum C L cadentium, atque aliquorum in peperia A N existentium propè maximum L B; quapropter existimandum est, incuria alicuius verba illa non sine Apollonij iniuria textui irrepsisse.



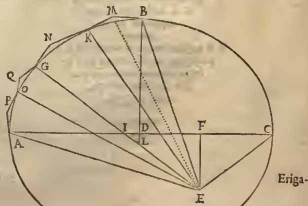
SECTIO

SECTIO DECIMAQVARTA

Continens Propof. LXXIII. LXXIV. LXXV. LXXVI. & LXXVII.

PROPOSITIO LXXIII.

SI ex concurfu E non exiftente fuper rectum minorem ellipfis A B C ducatur ad fectionem A B vnicus ramus vtrumque axim fecans, cuius portio G I inter fectionem, & axim maiorem A C fit breuiffima, vel duo breuifecantes; vtique ramorum fecantium ex illo concurfu egredientium maximus erit breuifecans, qui fectionis rectum fecat, nempe E G, & illi proximior maior eft remotiore; minimus verò eorum eft, qui terminatur à vertice fectionis proximiori concurfui, nempe E C, & illi propinquiores minores funt remotioribus, nempe inter C G. Si autem egrediantur ex illo tres breuifecantes, & duo illorum fecuerint menfuram, & vnus fecuerit rectum, vtique qui rectum fecat eft maximus ramorum fecantium: & ramorum inter mediam breuifecantem, & remotiorem verticem fectionis à concurfu cadentium, proximior illi, eft maior remotiore, & maximus duorum reliquorum breuifecantium eft ille, qui vertici proximus eft, & ramorum, inter proximiorem verticem fectionis, & intermedium breuifecantem cadentium, vicinior illi, maior eft remotiore. a



Eriga-

b Erigamus itaque super D perpendicularem D B occurrentem E G in L; ergo est dimidium recti, & E non est indirectum, quia non egreditur ex E, nisi vnicus breuiſecans; insuper lineæ breuiſsimæ egredien- c tes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt ab axi A C cum C, lineam maiorem, quàm ſecant rami illi (51. 52. ex 5.) His poſitis manifeſtum eſt, quod E C F eſt acutus; atque E C minima eſt linearum egredientium ex E ad quadrantem E B, & illi propinquior, minor d eſt remotiore; modo demonſtrandum eſt, quod E K maior quoque eſt, quàm E B, producamus itaque B M, M K tangentes, ergo M B E eſt obtuſus, & M K E acutus (29. ex 5.) quia breuiſſima egrediens ex K abſcindit cum A minorem lineam, quàm ſecat K E (57. ex 5.) eo quod K cadit inter duas lineas L B, L G; & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora ſunt, quàm quadratum M E, quare minora erunt duobus quadratis M K, K E, & M B maior eſt, quàm M K, ergo B E minor eſt, quàm K E; & ſic demonſtratur, quod G E maior ſit, quàm K E; Nam ſi producamus G N tangentem; tunc N G E eſt rectus, quia G I eſt breuiſſima, & N K E obtuſus; ergo G E maior eſt, quàm E K; itaque G E maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſectionem G C, & minimus eorum E C, atque propinquior E C minor eſt remotiore. 70. huius. 30. huius.

e Educamus ex E ad ſectionem A G, E A, E O, oſtendetur quod E G maior ſit, quàm E O, & E O, quàm E A. Erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P eſt obtuſus, & producamus P O Q tangentem; ergo P O E eſt acutus, quia linea breuiſſima egrediens ex O ſecat cum A lineam maiorem; ergo E O maior eſt, quàm E A: atq; ſic patet, quod E G maior ſit, quàm E O (29. ex 5.) quia Q G E eſt rectus, & Q O E obtuſus, & G Q maior, quàm O Q, ergo E G maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & minimus eorum E C, & propinquiores minimo, remotioribus minores ſunt, & propinquiores maximo, maiores ſunt remotioribus; quod erat oſtendendum. 57. huius.



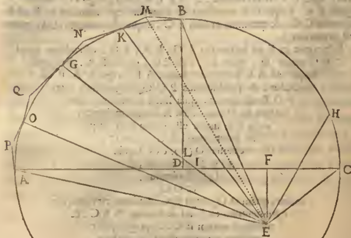
M PROPOS.

PROPOSITO LXXIV.

DEinde sint E H, E G duo breuiſecantes, & E G ſecet rectum B D. Dico, quod E G eſt maximus ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & E C eſt minimus,

Producatur perpendicularis E F, quæ non cadet ſuper centrum; ſi enim per centrum duceretur, duci poſſet ex E, aut vnicus breuiſecans tantum (44. ex 5.) aut tres (45. ex 5.) quod eſt contra hypotheſin; ergo E F per centrum non tranſit, cadat ſuper C D; & quia ducuntur ex E duo breuiſecantes, erit C F maior dimidio erecti, & E F æqualis Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vti antea demonſtrauimus, quod E G maximus ſit ramorũ, & E C minimus; atque propinquior maximo, maior eſt, & propinquior minimo, eſt minor. a

Ex 45. huius.



PROPOSITO LXXV.

POſtea educamus ex E tres breuiſecantes E G, E H, E I, & ſecent E I, E H menſuram, & E G ſecet rectum in L. Dico, quod E G eſt maximus ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & ramorum inter A H cadentium propinquiores illi, maiores ſunt remotioribus, & E I eſt maximus ramorum egredientium ad ſectionem H C, & illi propinquiores maiores ſunt remotioribus. a

Quo-

b Quoniam I K, H M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum cadentium ad illam sectionem (72. ex 5.) & propinquior
c illi maior est remotiore : nec non; quia H M, G N sunt duæ breuissimæ constat, vt dictum est, quod G E sit maximus ramorum cadentium vtrin- 74. huius.
d que ad sectionẽ A H. Dico etiam, E G maiorem esse, quàm E I: nam si producatur I O parallela ipsi A C, & iungatur E O, ducanturque perpendiculares I P, O Q, G R, E F S, quia G N, I K sunt breuissimæ erit 15. huius.
D P ad P K, quæ est, vt proportio figuræ, vt D R ad R N; ergo F P ad P K minorem proportionem habet, quàm F R ad R N; & diuidendo F K ad K P, nempe F E ad I P, minorem proportionem habet, quàm F N ad N R, nempe F E ad G R: ergo F E ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R, & propterea G R minor est, quàm I P; quæ est æqualis O Q, cuius punctum O remotior est à vertice, quàm G, & ideo E G maior est, quàm E O. (74. ex 5.) Et quia O T æqualis est T I erit O S maior quàm S I, & S E perpendicularis ad O I est communis; igitur O E maior est, quàm E I; & ostensa est E G maior, quàm O E; Ergo E G maior est, quàm E I, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXXVI.

a SI ex concursu E in recto E B posito ellipsis A B C nõ educatur breuisecans præter E B, qui transeat per centrum; erit E B maximus ramorum secantium ex concursu ad sectionem egredientium.

 Si

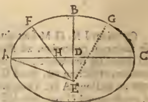
Si vero ex illo educatur alius breuisecans erit æqualis vni breuisecanti ex altera parte recti posito, & omnium reliquorum erit maximus. b



Quia breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt cum C, vel A lineas maiores, quàm secent rami (illi 44. ex 5.) demonstrabitur ductis tangentibus, per extremitates illorum (quemadmodum antea ostensum est) quod E B sit maximus ramorum egredientium ad duos quadrantes C B, B A, & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO LXXVII.

Postea educatur alius breuisecans E F; Dico, quod est æqualis vni breuisecanti E G æquè remoto à recto D B, & est maximus reliquorum omnium. a



Quia B D, F H sunt duæ breuissimæ, ergo rami egredientes ad sectionem B F abscindunt cum A maiores lineas, quàm secent breuissimæ, egredientes ab eorum extremitatibus: idem dicendum est de ramis educti ad sectionis peripheriam B G, & rami educti ad peripherias C G, A F abscindunt cum C, vel A lineas minores (45. ex 5.) constat itaque adhibitis lineis tangentibus, vt dictum est, quod E F sit maximus ramorum secantium ex E ad C B A egredientium, excepto vno E G, cui est æqualis, quod erat ostendendum. b c

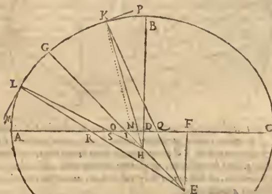
Notæ in Proposit. LXXIII.

P*RO clariori intelligentia propositionum huius sectionis hæc præmitto.*

LEMMA XII.

Si in ellipsi A B C à concursu E ductus fuerit ramus E G secans vtrumque axim in H, & I, cuius portio G I, inter axim maiorem A C, & sectionem intercepta, sit linea breuissima; dico, quod quilibet alius ramus E K inter breuisecantem G E, & axim minorem interceptus, efficit cum sectionem tangente K P angulum E K P acutum, *respi-*

respicientem verticem C concursui propinquiorem: & quilibet ramus E L inter breuisecantem G E, & axim maiorem positus efficit cum tangente L M angulum E L M respicientem eundem verticem A acutum.

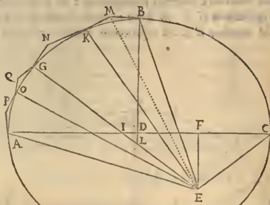


Ducatur E F perpendicularis ad axim maiorem, cum secans inter verticem C, & centrum D in F, & ex concursu axis minoris B H, & breuissima G E, scilicet ex H ducantur recta H K, & H L; pariterque ex punctis, K, & L ducantur ad axim maiorem A C linea breuissima K N, L O, ei occurrentes in N, & O. Quoniam (ex præmisso Lemmate 8.) à concursu H ducitur ramus H K inter breuisecantes H B, H G interceptus; ergo H K cadit infra breuissimam K N ad partes verticis C; est vero angulus N K P rectus à tangente, & breuissima contentus; ergo angulus H K P erit acutus, cum H K cadat inter N K, & tangentem K P; cadit vero E K infra ramum H K versus C; igitur angulus E K P respiciens verticem C proximiorem concursui E erit acutus. 29. 30. huius.

Similiter (ex eodem Lemmate 8.) quia ramus H L ducitur inter breuisecantem H G, & verticem A à concursu E remotiorem, cadet ipse supra breuissimã L O, estque angulus O L M ad partes verticis A rectus; ergo H L M acutus erit, cumque E L cadat supra H L versus A; igitur angulus E L M, verticem A remotiorem respiciens, erit acutus, quod erat ostendendum. Ibidem.

a Si à concursu E non existente super recto ellipsis A C, producatur vnicus ramus secans ipsam A C, vt E G, cuius segmentum G I, & A C sit breuissimum, vel duo breuisecantes; vtique maximus secantium ramorum egredientium ex illo concursu, est breuisecans, qui rectum sectionis abscindit, nempe E G, &c. *Textum mendosum sic restituendum censeo. Si ex*

concursu



concursu E non existente super axim rectum minorem ellipsis A B C ducatur ad sectionem A B vnicus ramus vtrumque axim secans, cuius portio G I inter sectionem, & axim maiorem A C intercepta sit linea breuissima; vel ducatur præter E G alius ramus breuisecans, mensuram tantummodo abscindens; vtique ramorum secantium, ex illo concursu egredientium, maximus erit ille, qui axim rectum sectionis diuidit, &c.

Erigamus itaque super D perpendicularem, &c. *Scilicet ex centro sectionis D eleuetur D B perpendicularis ad axim maiorem A C, occurrens sectioni in B, & ipsi E G in L, & propterea D B erit semissis recti axis, & punctum E in axi B D non existit ex hypothesi, &c.* b

Quoniam non egreditur ex E nisi vnus breuisecans, ergo lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum, abscindunt ab axi cum A C, L A lineam maiorem, quàm secent illorum rami (51. 52. ex 5.) & iam patet, quod si ita se res habet L E C est acutus; quia E C breuissima est linearum egredientium ex E ad quadrantem A B, & propinquior illi, minor est remotiore, &c. *Sic legendum puto: Quia præter E G, vtrumque axim secantem nullus alius breuisecans duci posse à concursu E ad sectionem supponitur, ergo lineæ breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum in quadrante C B abscindunt ab axi A C cum vertice C lineas maiores, quàm secent rami (51. 52. ex 5.) pariterque constat, quod angulus E C F sit acutus, atque ramus E C est minimus egredientium ex E ad quadrantem C B, & propinquior minima, minor est remotiore.* (64. 65. huius.) *Demonstrandum modo est, quod K E maior quoque est, quàm E B, &c.* c

Producamus itaque M B, M K tangentes; ergo M B E est obtusus, & M K E est acutus (29. ex 5.) quia breuissima egrediens ex K abscindit A lineam minorem, quàm A E (57. ex 5.) eo quod K est inter duo segmenta L B, L G: & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora sunt, quàm quadratum M E, quæ minora sunt duobus quadratis M K, K E, &c. *Idest; ex punctis B, K ducantur duæ tangentes sectionem M B, K M* d

occur-

occurrentes in M, & quia angulus D B M rectus est contentus ab axe, & tangente, & cadit B E inter C, & D ergo angulus E B M est obtusus; postea, quia E K cadit infra breuissimam E G, & supra minorem axim B D, ergo angulus E K M respiciens verticem C propinquiorem concursui, erit acutus, & iuncta M E erunt duo quadrata E B, B M minora quadrato E M, estque quadratum E M minus duobus quadratis E K, K M circa acutum angulum (cum priora angulum obtusum comprehendant,) igitur duo quadrata E B, B M simul sumpta minora sunt duobus quadratis E K, K M: estque quadratum M B maius quadrato M K, cum contingens M K, proximior vertici A axis maioris minor sit remotiore B M; igitur quadratum E B, scilicet residuum minoris summa minus erit quadrato E K, & propterea ramus E B minor erit, quàm E K. Conuers. 32. lib. 1. Lem. 12. 70. huius.

e Et educamus ex E ad sectionem A G, E A, E O, & patebit, quod E G maior sit, quàm E O, & E O, quàm E A: erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P est obtusus: & ducamus P O Q tangentem; ergo P O E est acutus, quia linea breuissima egrediens ex O abscindit cum A lineam maiorem, & P O est maior, quàm P A; ergo E O maior est quàm E A, atque sic patet, quod E G maior sit, quàm E O, &c.

Demonstratio postremæ partis huius propositionis neglecta ab Apollonio ob sui facilitatem occasionem errandi alicui præbere posset, propter verba illa postrema textui superaddita; non enim ex maiori summa duorum laterum P O, O E si auferatur maior O P, & ex minori summa P A, A E auferatur minor P A, necessario residuum maioris, idest E O maior erit quam E A residuum minoris; itaque sensus huius contextus talis erit.

Ex concursu E ad sectionem A G ducantur rami E A, & quilibet alius E O; ostendendum est, E G maiorem esse, quàm E O, & E O maiorem, quàm E A: ducantur A P, Q O tangentes sectionem in A, & O conuenientes in P, & tangenti G Q in Q. manifestum est angulum E A P obtusum esse, cum angulus C A P sit rectus pariterque quilibet ramus E O inter breuisecantem E G, & verticem A remotiorem interceptus efficit angulum E O P, verticem A respicientem acutum, & sic reliqui omnes rami inter puncta G, & A cadentes; quare (ex Corollario propositionum 64. & 65.) ramus E A minor erit quolibet ramo E O inter verticem A, & G cadente: rursus, quoniam breuisecans E G constituit cum tangente angulũ E G Q rectum; quare ex concursu E ad sectionis peripheriam G A omnes rami cadentes efficiunt cum tangentibus angulos, verticem A respicientes, acutos, & vnus tantummodo E G Q est rectus; igitur (ex Coroll. propos. 67. huius) ramus E O vertici A propinquior minor est remotiore E G; Quapropter ramus breuisecãs E G maximus est omnium ramorum secantium ad peripheriam A B C cadentium. Conuers. 32. lib. 1. Lem. 12. 29. 30. huius. Lem. 12.

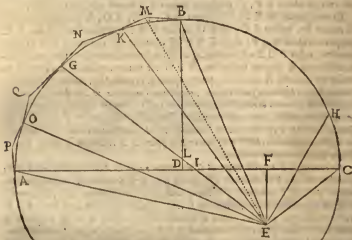
At adhuc non constat, ramum E C minimum esse prædictorum ramorum omnium, nisi priùs ostendatur, E C minorem esse quolibet ramo ad peripheriam A G educto: & hoc etiam ob sui facilitatem neglectum fuit ab Apollonio. Absoluetur tamen hac ratione.

Quoniam perpendicularis E F cadit inter C, & D, igitur A F maior est, quàm C F, & F E est communis circa angulos rectos in triangulis C F E, A F E, igitur C E minor est, quàm E A: estque E A minor quolibet alio E O inter A, & G cadente, igitur E C minor est omnium ramorum cadentium ad peripheriam A G, sed priùs minor ostensus fuit reliquis omnibus cadentibus ad peripheriam C B G; igitur ramus E C minimus est omnium secantium, quod erat ostendendum.

Notæ

Notæ in Propos. LXXIV.

Ergo E F per centrum non transit, cadat super C D, & quia producti sunt ex E duo breuisecantes; ergo C F excedit dimidium erecti, & E F æqualis est Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vt antea demonstrauimus, quod E G sit maximus ramorum, & E C minimus, &c. a



Quoniam in 11. huius ostensum est, quod semiaxis minor ellipsis est ramus breuissimus, ergo si incidentia perpendicularis E F super axim A C, idest punctum F est centrum ellipsis educerentur ex concursu E tres breuisecantes, nimirum E H, E G, & E F producta, quæ esset axis minor ellipsis: hoc autem est contra hypothesim, cum ducti sint ex E duo breuisecantes: ergo eorum vnus E H mensuram C F secat, quæ minor esse debet semisse axis maioris C D; igitur ex conuersa propositione 50. huius, mensura C F maior erit semisse lateris recti, & (ex conuersa propos. 52. huius) erit perpendicularis E F æqualis Trutinæ. Demonstratio huius propositionis neglecta ab Apollonio, propterea quod eodem ferè modo, ac præcedens ostendi potest, breuissimè perficietur in hunc modum.

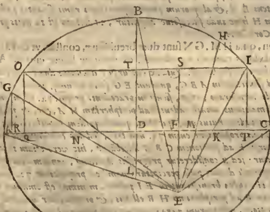
Propos. 67. huius. *Quoniam à concursu E vnicus tantum breuisecans E H ad quadrantem C B ducitur; igitur C E minimus est omnium ramorum cadentium ad sectionis peripheriam C B, & E C vertici B propinquior minor est remotiore E H, & E H minor, quàm E B: rursus, quia ramorum cadentium ex E ad peripheriam* Ex 29. 30. huius. *B G vnus tantummodo breuisecans E G constituit cum tangente N G angulum*

rectum,

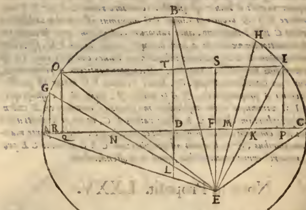
rectum, & reliqui omnes rami cadentes super totum arcū G B, constituunt cum Lem. 12.
suis tangentibus angulos acutos, respicientes verticem C; igitur quilibet ramus Coroll.
E B propinquior vertici C minor est quolibet remotiore ramo E K, & E K mi- prop. 67.
nor est remotiore E G: & propterea ramus E G maximus est omnium cadentium huius.
ad peripheriam C B G. Postremò, quia ramorum cadentium inter breuisecan-
tem E G, & remotiorem verticem A axis maioris, vnicus tantū E G efficit cum 29. 30.
sua tangente angulum E G N rectum; reliqui vero omnes cadentes inter G, & huius.
A efficiunt cum suis tangentibus angulos, respicientes verticem A remotiorem, Lem. 12.
acutos; igitur (ex Corollario propos. 67. huius) ramus E G maior est quolibet huius.
ramo E O vertici A propinquiore, & E O maior est, quàm E A: quapropter breuisecans E G vtrumque axim abscindens maximus est omnium ex E cadentium ad semiperipheriam ellipsis C B A, & ramus E C, vt in praecedenti dictū est, minimus erit omnium, atque propinquiores maximo ex eadem parte maiores erunt remotioribus, & cadentium ad peripheriam C B G minimo C E propinquiores, minores erunt remotioribus, quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. LXXV.

a POstea ducamus ex E tres breuisecantes E G, E I, E H, & secent E I mensuram, & E G secet rectum in L, &c. *Idest: Postea si ex concursu E ducti fuerint tres breuisecantes E G, E I, E H; quorum duo E I, E H secent mensuram in K, & M: E G verò secet axim rectum in L; & axim maiorem A C in N. Dico, &c.*



b Quoniam I K, N M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum egredientium ad illius sectionem (52. ex 5.) & reliquorum ramorum propinquior illi, maior est remotiore, &c. *Idest: Quia in quadran-*



te ellipsis C B ducuntur à concursu E duo breuisecantes E I, E H; igitur (ex propositione 72. huius) erit breuisecans E I vertici A propinquior maximus omnium ramorum cadentium ex concursu E ad ellipsis peripheriam C H; & propinquior maximo E I maior erit remotiore, sed non omnium ramorũ cadentium ad quadrantem C B, sed eorum solummodo, qui inter verticem C, & infimum breuisecantem E H, & aliquorum propè ipsum; nam rami secantes cadentes propè punctum H hinc inde succesiue augentur, vt dictum est in notis propos. 67. in eiusque Corollario.

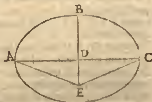
Nec non, quia H M, G N sunt duæ breuissimæ, constat, vt dictũ est, quod G E sit maximus ramorũ egredientiũ ex vtroque latere eius ad A H, &c. C
Quorũ verborũ sensus hic est. Quia ex concursu E ducuntur duæ breuisecantes E G & E H ad semiellipsim A B C, quarum E G secat vtrumq; axim, at E H secat tantummodo mensuram; ergo, sicuti in præcedenti propos. 74. ostensum est, erit ramus E G maximus omniũ cadentiũ ad peripheriam H A, &c. At quia dubitari posset de certitudine huius consequentiæ, quandoquidem hypotheses non sunt omnino eadem; in propositione enim 74. non tres, sed duo tantummodo breuisecantes ex concursu E ad sectionem C B A ducebãtur, hic vero etiam tertia breuisecans ducitur: sed si consideretur progressus Apollonij, eandem conclusionem ex vtraque hypothesi deduci posse percipitur; nam (ex propositione 72. huius) breuisecans E H, infra breuisecantem E I positus, minimus est omnium ramorum cadentium ex E ad peripheriam H B ellipsis, & propinquior minimo E H minor est remotiore, reliquorum vero ramorum cadentium ad quadrantem B A maximus est breuisecans E G, vt ostensum est in præcedenti proposit. 74. ex Lemmate. 12. huius, & ex Corollario proposit. 67, atque propinquior ramus maximo E G eorum, qui ad quadrantem B A cadunt maior est remotiore; quapropter ramus E G maximus est omnium ramorum ex E ad ellipsis peripheriam H A cadentium.

Dico

d Dico etiam, quod E G maior sit, quàm E I, &c. *Idest: Ostendetur etiam, quod ramus E G maximus etiam sit omnium ramorũ cadentium ad peripheriam C H, propterea quod E G ostendetur maior E I maximo eorum, qui ad peripheriam C H duci possunt. Ducatur ex puncto I recta I O parallela axi maiori A C, quæ secabit axim minorem, & sectionem, cum punctum I cadat inter vertices C, & B duorum axium; secet igitur sectionem in O, coniungaturque E O, atque ex punctis I, O, G, E ducantur perpendiculares ad axim I P, O Q, G R, E F S, quæ secent axim in P, Q, R, F, & I O in S, & quia G N, & I K sunt breuissimæ; ergo D R ad R N, atque D P ad P K eandem proportionem habent, nimirum eam, quàm habet latus transuersum ad rectum; est verò K F minor, quàm D K, atque R F maior, quam D R; igitur F P ad P K minorem proportionem habet, quàm D P ad P K, seu quàm D R ad R N, & multo minorem, quàm F R ad R N; quare diuidendo F K ad K P minorem proportionem habebit, quàm F N ad N R, & propter parallelas F E, I P, & similitudinem triangulorum E K F, I K P est E F ad I P, vt F K ad K P; igitur E F ad I P minorem proportionem habet, quàm F N ad N R; sed propter similitudinem triangulorum E F N, G R N est E F ad G R, vt F N ad R N; igitur eadem E F ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R; & propterea I P, seu ei æqualis O Q (in parallelogrammo rectangulo P O) maior erit, quàm G R, & propterea punctum O recedit à puncto G versus B, ideoq; ramus E G maximus, maior erit ramo E O, &c.* 15. huius. 74. huius.

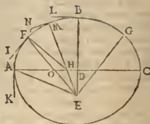
Notæ in Proposf. LXXVI.

a SI autem non educatur ex concursu E ad rectum E B ellipsis A B C breuisecans præter transeuntem per centrum, vt E B, vtique erit maximus ramorum secantium egredientium ex concursu ad sectionem.



Si vero eductus fuerit ex illo alius breuisecans, ipse erit ramus maximus, &c. *Imperceptibilis est sensus huius textus, quia, præter phrasis Arabicæ difficultatem, nonnulla verba in textu desiderantur; itaq; sic legendum puto. Si ex concursu E in recto E B posito ellipsis A B C non educatur breuisecans præter E B transeuntem per centrum, erit E B maximus ramorum secantium ex concursu ad sectionem egredientiũ. Si vero ex illo educatur alius breuisecans, erit æqualis vni breuisecanti ex altera parte recti posito, & omnium reliquorum erit maximus: Si enim hæc extrema verba non opponerentur, propositio non esset vera, vt ostendetur.*

b Quia breuissimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt cum A, vel B lineam maiorem, quàm secet ramus illius (49. ex 5.) demonstratum ergo est in lineis tangentibus ad extremitatem illius, quemadmodum antea, &c. *Mendosè citatur quadragesima nona huius, debet potius legi 43. in qua ostensum est, quod quotiescunque ramus E B ad se-*



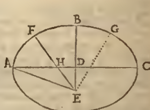
miaxim minorem B D habet eandem, aut maiorem proportionem, quàm latus transuerſum A C ad eius latus rectum; tunc nullus alius ramus ad ſectionem A B C breuiſecans duci poteſt, & qualibet linea breuiſſima vt F H ducta ex puncto F ad axim A C cadit infra ramum E F ad partes centri, & propterea ſi per F ducatur

ex 29. 30. huius. *F I contingens ellipſim quilibet ramus E F efficiet cum tangente angulum E F I reſpicientem verticem A acutum: Similiter ſi ducatur A K contingens ſectionem in A co-*

ex 32. lib. 1. *niungaturque E A, erit quoque angulus E A K acutus, & ducta B L contingente ſectionem in B erit angulus E B L rectus; quapropter omnes rami ex concurſu E ad quadrantem A B ducti efficiunt cum ſuis tangentibus angulos reſpicientes*

Coroll. 67. huius. *verticem A acutos, & vnus tantummodo E B L eſt rectus; igitur ramorum cadentium ex E ad quadrantem B A minimus eſt E A, & quilibet ramus E F propinquior vertici A minor eſt quolibet remotiore; & propterea E B erit maximus: ſimili modo E B maior erit quolibet ramo E G in quadrante B C exiſtente; Et hic eſt ſenſus, ni fallor illorum verborum*; demonſtrabitur in lineis tangentibus, quemadmodum antea oſtenſum eſt, &c.

Notæ in Propoſit. LXXVII.



a

POſtea educatur E F, qui eſt maximus ramorum, &c. *Repono hic ſimiliter verba, quæ in textu deſiderantur; Poſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æquè remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium.*

Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ; ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A lineas maiores, quàm ſecent breuiſſimæ egredientes ab eorum extremitatibus, & rami egredientes ad duas peripherias C B, F A abſcindunt cum A, vel C lineas minores (52. ex 5.) &c. *Quia in ellipſi ſemiaxis minor B D, & breuiſſima F H*

Lem. 8. huius. *concurrunt in E; ergo quilibet ramus ex E ad peripheriam F B ductus cadit infra breuiſſimam ab eius termino ad axim A C ductam: ſimiliter, quia ramus E G æquè recedit ab axi D B, ac ramus E F; propterea, ne dum ramus F E æqualis erit ramo E G, ſed ſimiliter quilibet alius ramus incidens inter E B,*

Ibidem. *& E G cadet infra breuiſſimam ab eius termino ad axim A C ductam verſus*

Ibidem. *D, & rami cadentes ad peripherias A F, & C G cadunt ſupra breuiſſimas ab eorum terminis ad axim C A ductas ad partes A, & C.*

Conſtat itaque, vt dictum eſt de lineis tangentibus, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium egredientium ex E ad A B C, quod erat oſten-

den-

dendum, &c. *Quæ postrema verba sic intelligi, ac corrigi debent. Quia quilibet ramus ex E ad A F ductus cadit supra breuissimam ad partes A ab eius termino ad axim C A ductam; igitur, vt multoties dictum est, constituit cum sua tangente angulum respicientem verticem A acutum, sicuti angulus E A K acutus quoque est, & omnium ramorum ad peripheriam A F cadentiũ tantummodo angulus E F I est rectus; igitur omnium ramorum ex E ad peripheriam A F cadentium maximus est F E remotissimus à vertice A, estque ramus E G æqualis E F, & E G maximus est ramorum cadentium ex E ad peripheriam G C; igitur ramus E F maximus etiam est ramorum cadentium ad peripheriam G C: postea ducto quolibet ramo E M inter F, B, & M N tangente sectionem in M, quæ conueniat cum tangente I F in N, quia E M, vt dictum est, cadit infra breuissimam ex M ad axim B A ductam, cum qua contingens N M angulum rectũ constituit, (ex 30. huius) ergo angulus E M N respiciens verticem A est obtusus, & angulus E F N est rectus, cum F O sit breuissima, igitur duo quadrata E F, F N maiora sunt duobus quadratis E M, M N simul sumptis, & ablatum quadratum M N ex minori summa maius est ablato quadrato N F, cum contingens N F vertici A maioris axis propinquior sit; ergo quadratum E F maius ex quadrato E M, ideoque ramus E F maior erit quolibet ramo E M inter F, & B posito. Non secus ostendetur E M maior quàm E B; quare ramus E F maximus erit omnium cadentium ad peripheriam F B. Eodem modo ramus breuisecans E G maximus erit omnium cadentium ad peripheriam G B; & propterea ramus E F maximus erit omnium ad peripheriam F B G cadentium; Quapropter ramus breuisecans E F æqualis erit vni tantummodo E G æquè ab axi remoto, & maximus omnium ramorum ex concursu E ad semiellipsim A B C cadentium, quod erat ostendendum.*

Lem. 3. huius.

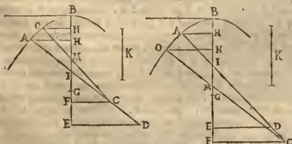
Coroll. Prop. 67. huius.

70. huius.

Sicuti in prioribus propositionibus factum est, reperientur, quotnam rami inter se æquales à puncto concursus ad conisectionem duci possunt, qua occasione afferam propositiones aliquas non iniucundas, quarum prima erit.

PROP. 7. Addit.

Si ad conisectionem B A à concursu D vnicus tantum breuisecans D A duci possit, & ducatur quælibet F C parallela perpendiculari D E

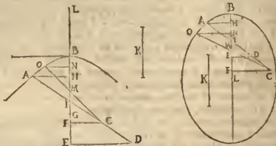


inter productionem breuissimæ, & axim intercepta quem secet in F, reperia-

periaturque Trutina K minoris, vel maioris mensuræ F B: dico perpendicularem C F minorem esse Trutina K.

Secentur primo in parabola abcisſa B H, & B N æquales trienti exceſſus inæqualium menſurarum ſupra ſemierectum (vt præcipitur in propoſitione 51. huius) manifeſtum eſt, abſciſſam B N minorem eſſe ipſa B H, quando B F minor eſt, quàm B E, & maior, quando B F ſuperat ipſam B E; eo quod eorum tripla, vna cum ſemierecto, idest menſura B F minor fuerat in primo caſu, & maior in ſecundo, quàm menſura B E.

Lem. 7. huius. *In hyperbola vero, & ellipſi fiat proportio recta H L ad ſemiaxim tranſuerſum L B ſubtriplicata eius, quàm inuerſa L E ſegmentum L G homologum lateri tranſuerſo habet ad ſemiaxim tranſuerſum (ex præſcripto propoſit. 52. & 53. huius) pariterque fiat proportio N L ad L B ſubtriplicata eius quàm inuerſa minoris L F in primo caſu, & maioris in ſecundo, ſegmentum homologum lateri tranſuerſo habet ad L B.*



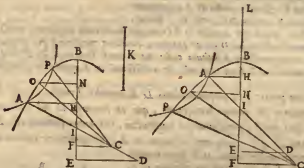
Quoniam in primo caſu maius ſegmentum G L ad eandem L B habet maiorem proportionem, quàm minus ſegmentum ex L F diſſectum; igitur earum ſubtriplicatæ proportiones inæquales erunt, videlicet H L ad L B maiorem proportionem habebit, quàm N L ad ipſam L B, & propterea H L maior erit, quàm N L, & ablata communi L B, erit H B abſciſſa maioris menſuræ maior, quàm N B abſciſſa menſuræ minoris. Similiter oſtendetur in ſecundo caſu, quod abſciſſa N B maioris menſuræ maior eſt, quàm B H. Oſtendendum modo eſt, perpendicularem C F in vtroque caſu minorem eſſe trutina K; Si

51. 52. huius. *enim hoc verum non eſt, ſi fieri poteſt, ſit C F maior trutina K; igitur ex concurſu C ad ſectionem B A nullus ramus breuiſecans duci poteſt, quod eſt contra hypotheſim; erat enim A I breuiſsima; quare C F non erit maior trutina K. Sit ſecundo C F æqualis K, ſi fieri poteſt, ergo ramus principalis C O ductus legibus propoſit. 51. 52. huius cui competit trutina K erit breuiſecans ſingularis eorum, qui ad ſectionem duci poſſunt, nec vllus alius, præter C O, breuiſecans erit: cadit vero ramus C A infra, vel ſupra ramum C O, propterea quod abſciſſa B H, & B N inæquales oſtenſæ ſunt; igitur ramus C A diuerſus à breuiſecante ſingulari C O non erit breuiſecans, quod eſt contra hypotheſim;*

non

non ergo perpendicularis C F æqualis erit Trutinæ K, sed prius, neque maior illa erat; igitur perpendicularis C F necessario minor erit Trutina K; quod erat ostendendum.

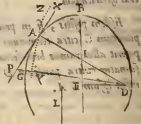
Iisdem positis, si in productione breuissimæ A I sumatur quodlibet punctum C citra terminum D perpendicularis D E, à puncto C duci poterit alter ramus breuisecans supra C A incedens; & si punctum C sumatur vltra punctum D poterit ex C duci alter ramus breuisecans infra ipsum C A. PROP. 8. Addit.



Quoniam qualibet recta C F parallela perpendiculari D E interposita inter productionem breuissimæ A I, & axim minor est Trutina K noua mensura B F (ex præcedenti propos.) propterea ramus principalis C O cadit supra ipsum C A, quando B F minor est, quàm B E, & tunc quidem duci potest hyperbola ex puncto A circa asymptotos (vt in propositione 51. & 52. factum est) quæ producta occurret sectioni B A inter B, & O, vt in P, & coniuncto radio C P, erunt duo rami C A, & C P breuisecantes, quorum infimus est C A. Si vero 51. 52. 53. huius. *punctum C sumatur vltra punctum D, tunc quidem mensura B F maior erit, quàm B E, & propterea abscissa N B maior, quàm H B, & ideo principalis ramus C O cadet infra ramum C A; & denuo facta eadem constructione propofit. 51. & 52. huius, erunt duo rami C P, & C A breuisecantes, quorũ supremus versus B erit C A, quod erat probandum.*

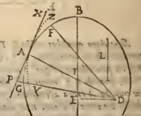
Sit consectio, vel ellipsis portio quadrantis B A G, cuius axis B E, perpendicularis E D, cuiusque Trutina L sit minor perpendiculari D E, & centro D, interuallo cuiuslibet rami secantis D A circulus Z A Y describatur, & ex puncto A ducatur recta A X contingens sectionem: PROP. 9. Addit.

nem: Dico, quod circumpherentia Z Y secat tangentem rectam lineam x A; & conisectionem B G in puncto A.



Quoniam perpendicularis D E ponitur maior trutina L; ergo quilibet ramus D A cadet
51. 52. huius. supra breuissimam ex puncto A ad axim B E ductam: efficit vero breuissima cum tangente
29. 30. huius. A x angulum rectum; ergo angulus D A x est acutus; & propterea recta A x cadit intra circulum A Z; sed A x cadit extra conisectio-
35. 36. lib. 1. nem B A, quàm contingit; ergo circumferentia Z A cadit extra sectionem B A, & extra tangentem A x: postea ducatur quilibet ramus D G infra ramum D A secans circumferentiã circuli in Y: & quia ramus D A propinquior est vertici B, quàm D G, erit D A minor,
64. 65. huius. quàm D G; estque D Y æqualis D A (cum sint ambo radij eiusdem circuli) ergo D Y minor erit, quàm D G: & propterea quodlibet punctum Y peripheriæ circularis infra punctum A positum cadet intra conisectionem B G; & ideo circumferentia Z A Y secat tangentẽ, & conisectionẽ in A, quod erat propositum.

PR. 10. Addit. Isdem positis; sit perpendicularis D E æqualis Trutinæ L, & sit D A singularis ille ramus breuisecans, qui ex concursu D ad sectionem
51. 52. huius. B G duci potest; perficiaturque constructio, vt antea factum est; Dico, circulum Z A Y secare conisectionem in A, & contingere rectam A x.



Ducatur quilibet ramus D F supra breuisecantem D A, secans circuli peripheriam in Z, & quilibet alius ramus D G infra D A secans eandem peripheriam in Y. Et quia ex concursu D ad sectionem B G vnicus tantum bre-
Ibidem. uisecans D A duci potest; igitur ramus D F
67. huius. propinquior vertici B minor est remotiore D A, & D A propinquior vertici B minor est remotiore D G: suntque rectæ D Z, D Y æquales eidem D A (cum sint radij eiusdem circuli) ergo D Z maior est, quàm D F, & D Y minor, quàm D G; & propterea quodlibet punctum Z circuli supra A sumptum cadit extra conisectionem B F A, & quodlibet infimum punctum Y eiusdem circuli cadit intra eandem conisectionem A G; quapropter circumferentia circuli Z A Y secat conisectionem B A G in A. Postea quia recta A x contingens sectionem in A perpendicularis est ad breuisecantem D A, cum I A sit breuissima; igitur recta linea x A, quæ perpendicu-
29. 30. huius. laris est ad radium D A, continget circulum Z A Y. Quapropter circulus Z A Y secant conisectionem B A G in A, & tangit eandem rectam lineam A x, quàm contingit sectio conica B A G, & in eodem puncto A, quod erat ostendendũ.

COROL-

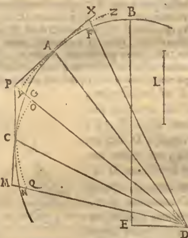
COROLLARIVM.

Hinc constat, supremam circuli peripheriam A Z cadere in locum à tangente X A, & conisectionem B A contentum, infimam vero circunferentiam A Y cadere ne dum infra tangentem, sed etiam infra conisectionem A G; eoquod recta A X cadit extra circuli peripheriam A Z, quàm contingit in A, & eadem circumferentia A Z cadit extra sectionem A B, quàm secat in A, vt dictum est.

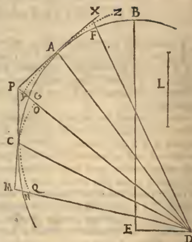
Mirabile quidem hoc videri poterit aliquibus, qui contingentiæ angulos, quos vocant, verè angulos esse censent; nam hìc duæ circumferentiæ curuæ, conica nimirum B A G, & circularis Z A Y se mutuo secant in A, & tamen ambo tanguntur ab eadẽ recta linea A X in eodem puncto A, in quo illæ se mutuò secant. Vnde colligent etiam, quod anguli contingentiæ facti à conisectione B A G, & recta linea X A non sunt aquales inter se, quando punctum A in vertice axis non existit; nam duo anguli contingentiæ circumferentiæ circularis, & rectæ tangentis X A aquales sunt inter se: at angulus contingentiæ sectionis conicæ supremus respiciens verticem B maior est angulo contingentiæ circularis, vt dictũ est: infimus vero angulus contingentiæ à sectione conica, & eadem tangente contentus minor est eodem angulo contingentiæ circularis, & propterea supremus angulus contingentiæ sectionis conicæ maior erit inferiori.

PROP. 11. Addit. Ex 51. 52. 53. huius.

Sit perpendicularis D E minor trutina L, sintque D A, & D C duo illi rami, qui tantummodo breuisecantes esse possunt omnium ramorum ex concursu D ad sectionem B C cadentium; atque centro D, interuallo D A describatur circulus Z A Y; pariterque centro D, interuallo D C describatur circulus O C Q; ducanturque rectæ X P, M P contingentes conisectionem in A, & C. Dico, circulũ Z A Y contingere conisectionem in A, & extra ipsam cadere, at circulum O C Q contingere eandem conisectionem in C, & intra ipsam cadere.



Ducantur quilibet rami D F, D G supra, & infra breuisecantem D A, secantes circulum Z A Y in Z, & Y; pariterque ducantur quilibet rami D G,

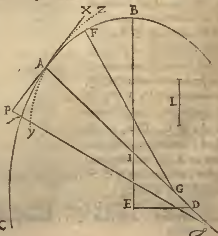


D N supra, & infra breuisecantem D C, secantes circulum O C Q, in O, & Q, dummodo D G non ducatur infra D C in primo casu, nec supra D A in secundo. Quoniam ramus D A supremus duorum breuisecantium maximus est omnium ramorum cadentium ad peripheriam B A C; igitur D A maior erit, quàm D F, & quàm D G; sunt verò D Z, & D Y aquales eidem D A (cum sint radij eiusdem circuli) ergo D Z maior est, quàm D F; pariterque D Y maior est quàm D G: & propterea duo qualibet puncta Z, Y eiusdem circuli Z A Y cadunt extra conisectionem B A G; & ideo circulus Z A Y tantummodo in puncto A conisectionem extrinsecus tangit. 72. huius.

Postea quia ramus D C infimus breuisecantium est minimus omnium ramorum cadentium ex D ad peripheriam A C N; ergo ramus D C minor est, quàm D G, & quàm D N: sunt vero D O, D Q aquales eidem D C (cum sint radij eiusdem circuli) igitur D O minor est, quàm D G: pariterque D Q minor est, quàm D N: quare qualibet duo puncta O, Q circuli O C Q hinc inde à puncto C cadunt intra conisectionem B C N, & ideo circulus O C Q intrinsecus contingit conisectionem in C, quod erat ostendendum. 72. huius.

PROP. 12. Addit.

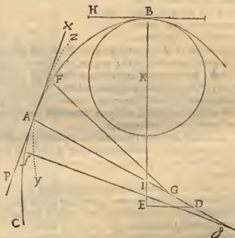
Si ad conisectionem, vel ad portionem quadrantis ellipsis B A C, ex concursu D duci non possit, nisi vnicus tantum breuisecans D A, atque centro D, interuallo D A circulus Z A Y describatur; Dico, omnium circulorum tangentium eandem rectam lineam X A P (quàm cõtingit quoque conisectio in A) vnicum esse circulum



culum Z A Y, qui conisectionem in puncto A secat.

Sumatur enim quodlibet punctum G in productione breuissima A I supra, vel infra punctum D: manifestum est (ex 8. praecedentium proposit.) à puncto G duci posse duos breuisecantes ramos, quorum A G erit infimus, si punctum G cadit supra punctum D, & tunc circulus radio G A descriptus continget conisectionem intrinsecus in A: si vero punctum g cadat infra punctum D, tunc pariter ex g duo breuisecantes duci possunt ad sectionem, quorum supremus erit g A; & propterea circulus radio g A descriptus continget conisectionem B A C extrinsecus in A; quapropter circulus radio D A descriptus (quem contingit eadem recta linea X A quae tangebat sectionem in A) vnicus erit, qui sectionem B A C secet in A, quod erat ostendendum. 11. Additarũ. 8. Additarũ. 11. Additarũ.

Circulorum omnium intrinsecus tangentium conisectionem non in axis vertice, assignari non potest maximus: tangentium vero intrinsecus sectionem in termino axis maximus erit, cuius radius aequalis est semierecto. PROP. 13. Addit.



Repetatur figura, & hypothesis praecedẽtis propositionis. Quoniã quilibet circulus radio G A minori, quàm D A descriptus semper intrinsecus tangit conisectionem in A (vt in praecedẽti propositione dictum est) vbicumque ponatur centrum G supra punctũ D; neque augendo radium G A efficitur alius contactus circuli, & sectionis, quàm intrinsecus, & tunc primo circulus desinit intrinsecus tangere sectionem in A, quando D A efficitur radius, scilicet quando non amplius intrinsecus sectionem tangit, sed eam secat in A; quapropter assignari non potest maximus circulorum tangentium intrinsecus sectionem in A. Quod vero circulorum intrinsecus tangentium eandem sectionem in vertice axis B, ille, cuius radius B K aequalis est semierecto B H sit maximus, ostensum est à Maurolico propos. 5. 8. & 11. libri 5. Conicorum. Patet ergo propositum.

Iisdem positis: dico circulorum omnium extrinsecus tangentium conisectionem minimum assignari non posse. PROP. 14. Addit.

 Sumpto

Sumpto in eadem figura quolibet puncto g infra punctum D, quoniam circulus radio g A descriptus continget extrinsecus conisectionem in A, nec vnquam cessabit prædictus cōtactus extrinsecus, licet magis, ac magis in infinitum punctum g ipsi D propinquior fiat, & tunc demum cessat huiusmodi extrinsecus contactus, quando describitur circulus radio D A, qui quidem sectionem secat in A, vt dictū est; quapropter minimus omniū extrinsecus sectionem tangentium in A assignari nequit. Quod vero extrinsecus tangentium eandem sectionem in vertice axis B non possit assignari minimus, patet; nam omnes circuli, quorum radij maiores sunt semierecto sectionis, eam extrinsecus tangunt; & tunc demum eiusmodi contactus extrinsecus cessat, quando radius circuli æqualis efficitur semierecto: at tunc intrinsecus sectionem tangit; quapropter reperiri non potest minimus circulorum conisectionem extrinsecus tangentium: quod erat ostendendum.

11. Addit. Maurol. 4. 7. & 10. lib. 5. Conic.

Ex dictis colligitur, quod ex concursu ad quamlibet conisectionem possunt duci tres, vel quatuor ramisecantes inter se æquales: in ellipsi vero, & in reliquis sectionibus si rami secantes non fuerint, duci potest vnus, vel duo rami inter se æquales.

Nam circulus radio alicuius breuisecantis descriptus tangit, vel secat conisectionem, & siquidem eam extrinsecus tangit, necessario eandem bis secat, si fuerit parabole, aut hyperbole, quæ infinitè augetur, & dilatatur; & propterea radij circuli ad occursus, & contactum ducti æquales sunt interse; & ideo tres rami tantum erunt æquales: si vero describatur circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor sit maximo, & maior minimo duorum breuisecantium: tunc quidem necessario circulus quatuor in punctis sectioni conicæ occurret: & propterea quatuor radij ad occursus ducti erunt inter se æquales.

At in ellipsi si concursus fiat circuli centrum, radius vero breuisecans maximus trium, qui in ea duci possunt, circulus prædicto radio descriptus continget quidem externus ellipsim, neque deinceps vnquam ei occurret: & propterea ramus ille maximus erit vnicus, cum nullus alius ei æqualis duci possit in eadem ellipsi: si verò à concursu in productione axis ellipsis posito describatur circulus, cuius radius minor sit maximo ramo, sed maior vtroque terminato; tunc quidem circulus duobus in locis ellipsi occurret; & propterea duo tantum rami inter se æquales erunt; pari modo, quando à concursu tres breuisecantes ad ellipsim educun-

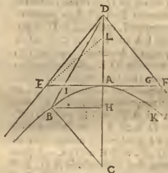
educuntur, tunc quidem circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor maximo breuisecantium, & maior duobus reliquis necessariò ellipsin duobus in locis secabit; & ideo duo tantummodo rami inter se æquales erunt.

SECTIO DECIMAQVINTA

Continens Propos. XXXXI. XXXXII. XXXXIII. Apollonij.

PROPOSITIO XXXXI.

a IN hyperbola angulus contentus à linea breuissima, & à mensura minor est angulo compræhenso à linea distante cum cõtinente.



b Sit hyberbole A B, eius axis D C, linea breuissima B C, duo continentes D E, D F, & distantia sit A E, & dimidium erecti A G: Dico, angulum B C D minorem esse angulo D E A. Educamus itaque perdendicularem B H, & iungamus B D, quæ secet A E in I. Quia D A ad A G est, vt D H ad H C (14. ex 5.) & I A ad A D est, vt B H ad H D; ergo ex æqualitate I A ad A G, eandem proportionẽ habebit, quàm B H ad H C, & 9. huius. propterea E A ad A G, nempe D A ad distantiam A E maiorẽ proportionem habebit, quàm B H ad H C igitur angulus B C H minor est, quàm D E A, quod erat ostendendum.

PROPOSITO XXXXII.

a IN parabola lineæ breuissimæ productæ occurrunt sectioni ex vtraque parte.

Quoniam breuissima est linea recta secans diametrum paraboles intra sectionem; & propterea sectioni occurret ex vtraque parte (28. ex pr.) 27.lib. I. & hoc erat ostendendum.

PROP.

PROPOSITIO XXXXIII.

SI inclinatus axis hyperboles erectum non excedit, nulla linearum breuissimarum sectioni ex altera parte occurret: si verò maior illo fuerit, tunc breuissimarum linearum aliquæ occurrunt sectioni, aliquæ verò non occurrunt. a b

Sit priùs D A non maior, quàm A G: & quia D A ad A G eandẽ proportionem habet, quàm quadratum D A ad quadratum A E, erit D A non maior quàm A E; & propterea angulus D E A non erit maior angulo E D A: sed maior fuerat angulo B C H (41. ex 5.) ergo angulus E D A, nempe A D F maior est, quàm B C D, & propterea B C, D F non conueniunt ad partes C, F; igitur B C non occurrit sectioni ad partes K, A; eo quod si illam secaret, etiam ipsi D F occurreret (8. ex 2.) quare non occurrit sectioni in duobus punctis.

Deinde sit D A maior, quàm A G habebit E A ad A G maiorem proportionẽ, quàm ad A D; & ponatur I A ad A G, vt E A ad A D; ergo I A minor est, quàm E A, quare recta D B, illam diuidens, occurret sectioni, & cadat in B, ducaturque linea breuissima B C, & B H perpendicularis ad D C; erit I A ad A D, vt B H ad H D; estque D A ad A G, vt D H ad H C; ergo I A ad A G, nempe E A ad A D est, vt B H ad H C, & propterea duo triangula E A D, B H C sunt similia; igitur angulus B C H æqualis est E D A, nempe F D A; quare B C, D F sunt parallelæ, nec possunt se se mutuo secare; ergo B C non occurret sectioni K A. c

Secunda lib. 2. 14. huius. 13. lib. 2.

Lineæ vero breuissimæ, quæ in peripheria A B cadunt, continent cum C A angulos minores angulo B C D (26. 27. ex 5.) vnde non occurrent ipsi D F, & proptèrea neque sectioni occurrent. At ille, qui cadit extra hanc sectionis peripheriam; si producatur continet cum C D angulum maiorem angulo B C D (26. 27. ex 5.) igitur productus occurrit D F, & occurrit sectioni A K: quod erat ostendendum.

Conuerſ. 8. lib. 2.

D L E A G F I H B K C

Notæ in Propos. XXXXI.

ANgulus contentus à breuissima linea, & mensura minor est angulo contento à distante cum continente in sectione, &c. *Adycio particulam*

ticulam in hyperbole, *quæ in textu desideratur. Vocat interpres Arabicus lineam distantem ipsam A E, quæ contingit hyperbolem in vertice axis A, & interponitur inter verticem A, & continentem, seu asymptoton D E.*

b Sit sectio, D C diameter illius, &c. *Legendum puto; Sit hyperbole A B eius axis D C. Postea quia D A, ad A G, seu latus transuersum ad rectum est, vt D H ad H C, atque I A ad A D est, vt B H ad H D (propter similitudinem triangulorum I A D, & B H D) ergo ex æqualitate ordinata I A ad A G est vt B H ad H C: deinde quia linea A E media proportionalis est inter semiaxim transuersum D A, & semierectum A G, cum quadratum ipsius A E quadrans sit figuræ quæ ad diametrum per A ductum constituitur; igitur E A ad A G erit, vt D A ad A E, est vero E A maior, quàm I A; igitur I A ad A G minorem proportionem habet, quàm E A ad A G, seu quàm D A ad A E: erat autem B H ad H C, vt I A ad A G: igitur B H ad H C minorem proportionem habet, quàm D A ad A E: fiat postea L A ad A E, vt B H ad H C circa angulos rectos A, H, coniungaturq; L E, manifestum est, L A minorem esse D A, & angulum A E L minorem esse angulo A E D: sed propter similitudinem triangulorum B H C, L A E est angulus C æqualis angulo A E L; & propterea angulus A E D maior est angulo B C H.* Ex 14. huius. 3. lib. 2.

Notæ in Propos. XXXXII.

a QVia est linea recta secans diametrum paraboles; &c. *Addo illam particulam* breuissimam, *quæ in textu desiderari videtur.*

Notæ in Proposit. XXXXIII.

a INclinatum si non excedit erectum, nulla linearum, &c. *Addo, quæ euidenter deficiunt in textu, legi enim debet: Axis inclinatus idest transuersus si non excedit erectum, &c.*

b Et quia D A ad A G est vt quadratum D A ad quadratum A E, &c. *Eo quod quadratum A E æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad duplam semiaxis D A applicatur, scilicet æquale est rectangulo D A G; igitur D A, A E, A G sunt continuæ proportionales: ponitur vero D A æqualis, aut minor, quàm A G; igitur D A æqualis, aut minor quoque erit, quàm A E; & propterea in triangulo D E A erit angulus D E A æqualis, aut maior angulo A D E, seu A D F (cum angulus continentiæ secetur bifariam ab axi) & prius erat angulus C minor angulo A E D; igitur angulus B C D minor erit alterno angulo F D C; vnde constat rectas lineas F D, C B concurrere posse, si vlterius producantur ad partes D, B; non autem ad partes C, & F.* 3. lib. 2. 41. huius.

c Quia si occurreret illi occurreret D F (7. ex 2.) secaretque sectionem in duobus punctis, &c. *Sensus huius textus talis est. Quoniam, vt ostensum est, recta B C infinite producta non occurrit asymptoto D F ad partes F C; igitur recta C B producta non secabit peripheriam hyperboles ad partes K; nam si ipsam secaret, secaret quoque asymptoton D F ad partes F, quod non ponitur. Ex his inferri debet conclusio principalis, nimirum, quod B C non occurrit sectioni duobus in punctis: & hac ratione textum alioqui corruptum emendaui.* 8. lib. 2. Ibidem.

Lineæ

d

Lineæ vero breuissimæ, quæ cadunt ad peripheriam sectionis B A, continent angulos minores, quàm B C D, vtique non occurrunt D F, &c. *Idest: quia qualibet breuissima ex puncto peripheriæ A B ad axim ducta efficit angulum propinquiorem vertici, minorem ipso angulo C; & propterea qualibet breuissima ad peripheriam A B extensa secabit necessario ipsam B C vlterius productam ad partes C: sed prius ostensa fuit B C parallela asymptoto D F; igitur qualibet breuissima ad peripheriam A B educta idest inter parallelas posita non occurret alteri æquidistantium D F ad partes F, sed ad partes oppositas versus D; eo quod qualibet recta linea intra hyperbolam ducta non secat peripheriam sectionis in ea parte, in qua continentem D F nō secat; At qualibet alia breuissima infra C B ducta, necessario efficiet ad axim angulum maiorem, quàm C; & propterea vlterius producta secabit ipsam B C ad partes C; sed qualibet breuissima extra parallelas posita quæ secat vnam æquidistantium B C, secabit quoq; reliquam ad easdem partes F C; quare prius sectioni occurret, vt dictum est.*

26. 27. huius.

28. huius.

Conuers. 8. lib. 2.

26. 27. huius.

28. huius.

SECTIO DECIMASEXTA

Continens XVI. XVII. XVIII. Propos. Apollonij.

SI mensura comparata sumpta fuerit in axe recto minore ellipsis, erit maximus ramorum ab eius origine egredientium, & illi propinquior maior est remotiore: minimus vero ramorũ est differentia recti, & comparatæ, & illi propinquior, minor est remotiore, atque excessus quadrati comparatæ supra quadratum cuiuscunque rami assignati æqualis est exemplari applicato ad abscissam illius rami, siue comparata sit minor, aut æqualis, aut maior recto. a

Sit D C rectus axis minor sectionis ellipticæ A B C sitque C I comparata, & rami I H, I K, I B, I L, I A, I D, & semissis erecti sit C F, & centrum E, & edu-

educamus F E quousque secet D M perpendicularem ad axim in M, & F I occurrat D M in N, & ducantur ad axim perpendiculares H O T S, K P V, B E, L Q, A R: & sit in prima figura C I minor recto, in secun-
b da æqualis, in tertia vero maior. Constat, quemadmodum demonstrauimus in propositione sexta huius, quod quadratum I C æquale sit duplo trianguli I C F; at quadratum O H duplum est trapezij O T F C (1. ex 5.) & quadratum I O duplum est trianguli O I S; ergo quadratum I C, nempe duplum trianguli I F C excedit quadratum I H duplo
c trianguli F T S, quod est æquale rectangulo T a: & constat, vti dictum

est, quod sit exemplar applicatum ad O C; ergo quadratum I C excedit quadratum I H exemplari applicato ad O C abscissam ipsius I H. Patet etiam, quod quadratum I C excedit quadratum I K exemplari applica-
d to ad P C; idemque constat in I B; igitur I C maior est, quàm I H, & I H, quàm I K, & I K, quàm I B: postea, in figura prima, & tertia,

e quia triangulum F C E æquale est triangulo D E M; ergo quadratum I C æquale est duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, quadratum vero I D æquale est duplo trianguli D I N; igitur quadratum

I D minus eſt, quàm quadratũ I C duplo trianguli N F M, quod æquale eſt exemplari applicato ad D C, & quadratum I R æquale eſt duplo trianguli I X R, & quadratum A R æquale eſt duplo trapezij R M (3. ex 5.) ergo quadratũ I A minus eſt, quàm quadratum I C duplo trianguli F Z X, quod æquale ex exemplari applicato ad C R (6. ex 5.) ſimiliter quadratum I L minus eſt, quàm quadratum I C exemplari applicato ad C Q; eſtque C D maior, quàm C R, & C R quàm C Q; ergo I A maior eſt, quàm I D, & I L, quàm I A; quod erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XVI. XVII. XVIII.

COmparata ſi fuerit ex recto duorum axium ellipſis erit maximus ramorum, &c. *Addidi particulam illam axis minoris, quæ in textu deficiebat, nunquam enim C F ſemiſsis lateris recti, eſſe poteſt maior C E ſemiſſe lateris tranſuerſi, niſi C D fuerit axis minor ellipſis.* a

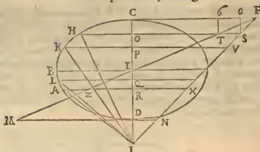
Conſtat, quemadmodum demonſtrauimus in propoſitione 6. &c. *Quoniã menſura I C ſupponitur cõparata, ideſt æqualis ipſi C F ſemiſsi lateris recti; propterea triangulum I C F iſoſceleum erit, & rectangulum in C; & ideo quadratum I C æquale erit duplo trianguli I C F: eadem ratione propter parallelas S O, & C F, erit triangulum I O S ſimile triangulo I C F, & propterea illud quoque iſoſceleum erit, & rectangulum in O, & ideo quadratum I O æquale erit duplo trianguli I O S: eſt verò quadratum O H æquale duplo trapezij F T O C; igitur quadratum I H (quod eſt æquale duobus quadratis I O, O H circa angulum rectum O) æquale erit duplo trianguli I O S cum duplo trapezij F T O C, ſed hæc duo ſpatia minora ſunt duplo integri trianguli I C F, eſtque defectus duplum trianguli F T S, ſiue rectangulum S T* b a; *igitur duplum trianguli I C F, ſiue quadratum I C maius eſt quadrato I H, & exceſſus eſt rectangulum T* a: *quod verò rectangulum T* a *ſit exemplar demonſtrabitur modo, vt in ſexta propoſitione huius.* b

1. huius.

Et conſtat, vt dictum eſt, quod ſit exemplar applicatum ad O C, &c. c
Quoniam recta S a, *T* b, *I C ſunt parallelæ, erunt triangula I C F, & S* a *F, ſimilia;*

ſimilia; pariterque duo triangula E F C, T b *F ſimilia erunt; & propterea S* a *ad* a *F eandem æqualitatis proportionem habebit, quàm I C habebat ad C F, ſimiliter T* b *ad* b *F eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F, ſeu quàm latus tranſuerſum D C ad eius latus rectum: eſt vero T* b *æqualis S* a, *ſeu* a *F; ergo F* a *ad F* b *eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum D C ad eius latus rectum; & comparando antecedentes ad differentias terminorum, erit F* a, *ſeu* b *T ad* b a, *vt latus tranſuerſum D C ad differentiam eiuſdem tranſuerſi, & recti lateris; quare parallelogrammũ rectangulum S* b, *erit exemplar applicatum ad abſciſſam O C.* Lem. 1. huius. Defin. 9. huius.

d Igitur I C maior eſt, quàm I H, & I H, quàm I K, &c. *Eo quod abſciſſa O C minor eſt, quàm C P, & C P minor, quàm C E: ſuntque prædictæ abſciſſæ latera homologa exemplarium, quæ ad eaſdem abſciſſas applicantur; atque prædicta exemplaria ſimilia ſunt inter ſe, cum circa angulos rectos latera habeant eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum D C ad differentiam eiuſdem tranſuerſi, & recti lateris; quare exceſſus quadrati I C ſupra quadratum I H minus eſt exceſſu eiuſdem quadrati I C ſupra quadratum I K; & adhuc minus exceſſu quadrati I C ſupra quadratum I B, & propterea recta I C minori exceſſu ipſam I H ſuperabit, quàm ipſam I K; & adhuc minori exceſſu ſuperabit I K, quàm excedat I B; & ideo I C maior erit, quàm I H, & I H maior, quàm I K, & I K maior, quàm I B.* Defin. 9. huius.



Ergo quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, &c. *Quoniam quadratum I C æquale eſt duplo trianguli I C F, ſeu duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E F C; eſtque duplum trianguli E D M æquale duplo trianguli E C F; igitur quadratum I C æquale eſt duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E M D: ijs vero triangulis æquatur duplum trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N; igitur quadratum I C æquale eſt duplo trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N: eſt vero quadratum I D æquale duplo trianguli D I N; igitur exceſſus quadrati I C ſupra quadratum I D eſt triangulum N F M bis ſumptum; ſcilicet exemplar applicatum ad latus tranſuerſum D C.* e

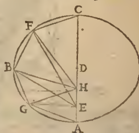
SECTIO DECIMASEPTIMA

Continens XIX. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. & XXV. Propoſ. Apollonij.

PROPOSITIO XIX.

SI menſura E C ſumatur in axe minori ellipſis A B C, ſitque maior comparata; erit maximus omniũ ramorũ egredientiũ ex ſua origine, vt E F, E B, E G; & maximo propinquior, maior erit remotiore, nempe E F, quàm E B, & E B, quàm E G. a

Coniungamus rectas A G, G B, B F, F C; & ſecetur C H æqualis comparatæ: iungãturque F H, H B, H G. b

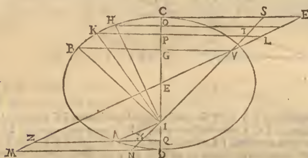


Et quoniam H C maior eſt, quàm H F, (16. 17. 18. ex 5.) erit angulus H C F minor, quàm H F C; & ideo multo minor erit, quàm E F C, quare E C maior eſt, quàm E F: & ſic conſtat, quod E F maior ſit, quàm E B, & E B, quàm E G, & E G, quàm A E; quod erat oſtendendum.

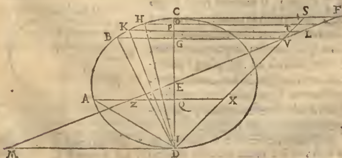
PROP.

PROPOSITIO XX. XXI. & XXII.

a SI in ellipsi A B C mensura I C in axe minori C D sumpta minor fuerit comparata, C F, & maior dimidio axis E C, (perficiaturque figura, vt antea) dico, quod omnium ramorum I A, I B, I K, I H, I C egredientium ex origine I maximus



est I B, cuius potentialis B G abscindit à mensura versus originem rectam G I, ad quàm inuersa E G eandem proportionem habet, quàm D C ad eius erectum; Et quadratum maximi I B superat quadratum cuiuslibet alterius rami I K exemplari applicato ad G P differentiam eorum abscissarum.



Quoniam proportio E G ad G I facta est, vt E C ad C F, nempè E G ad G V, erit G V æqualis G I; & propterea quadratum G I æquale est duplo trianguli G I V, & quadratum G B æquale est duplo trapezij G F (1. ex 5.) ergo quadratum I B æquale est duplo trianguli I C S cum b

duplo trianguli F S V; & sic constat, quod quadratum I K æquale est duplo trianguli I C S cum duplo trapezij S L; & propterea quadrati I B excessus supra quadratũ I K æqualis erit duplo trianguli L T V, quæ æqualia sunt exemplari applicato ad G P (6. ex 5.) atque sic ostendetur, quod I B potentia superat I H; estque excessus exemplar applicatum ad G O, & superat quoque I A potestate, estque excessus æqualis exemplari applicato ad G Q; est vero G O maior, quàm G P; ergo I B maior est quã I K, & quàm I H; & sic ostendetur, quod I B maior sit, quàm I A; & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

E Contra, si maximi rami origo ponatur in axi minore, at non in cẽtro ellipsis, nec sit mensura continet cum ipsa mensura angulum acutum, & eius inuersa ad abscissam à potentiali cum origine habet eandem proportionem figuræ axis recti minoris: si vero educatur ex centro, erit perpendicularis super rectum. a

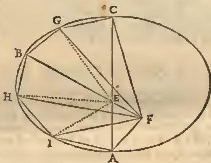
Sit sectio elliptica A B C centrum D, & E origo, quæ sit in axi minori C A, & E F ramus omnium maximus; erit vtique E C, vel maior b

semie-

semierecto, aut æqualis, aut minor illo; sed si esset æqualis, aut maior esset quoque E C maximus ramorum (16. 17. 18. 19. ex 5.) ergo C E minor est dimidio erecti, & ideo aliqua minor, quàm D C ad residuam vsq;
c ad E eandem proportionē habebit, quàm D C ad semissim erecti; & sit D G ad G E, & ex G ad axim ducamus perpendicularem: hanc, dico, occurrere sectioni in F; alioquin occurrat ei in H, & iungamus E H; igitur E H est maximus ramus (20. ex 5.) & propterea maior, quàm E F, qui maximus suppositus fuit, & hoc est absurdum; igitur occurrit sectioni in
d F; & quia G est rectus angulus, erit F E G acutus. Si verò ramus maximus educatur ex cētro, vt D B erit perpendicularis super A C; alioquin educatur D I perpēdicularis ad axim; igitur D I est semissis axis transuersi (11. ex 5.) & propterea est ramus omnium maximus, sed D B suppositus fuit maximus, quod est absurdum, vti dictum est; quare patet propositum.

PROPOSITIO XXV.

a SI in ellipsi ramus maximus E B mēsuram secans vltra originem E, in axe eius minori existentem, producatur ad F, fiet F B maximus omniū ramorum F G, F H, F I, ab eodem puncto, ad sectionem A B C cadentium, & propinquior maximo maior est remotiore.



b Educamus B G, B H, H I, I A, E G, E H, E I; & quia E B maior est, quàm E H, erit angulus B H E maior, quàm E B H; igitur angulus B H F multo maior erit, quàm H B F, & propterea B F maior, est quàm F H; atque sic demonstrabitur, quod H F maior sit, quàm F I, & F I, quàm F A; & hoc erat ostendendum.

Notæ in Proposit. XIX.

a SI vero fuerit mensura E C ex recto duorum axium ellipsis A B C; sed sit maior comparata, &c. *Similiter hic declarari debet, quod axis rectus sit minor; & propterea lego: Si mensura E C sumatur in axe minori ellipsis, &c.*

Nam

b

Nam si coniungamus A G, B G, B F, F C, &c. *Idest; secetur C H æqualis comparatæ, seu semissi lateris recti axis A C; quia mensura E C supposita est maior comparata, erit quoque E C maior, quàm C H, & propterea recta linea E F cadet infra H F; ideoque angulus C F E maior erit angulo C F H: eadem ratione angulus F B E maior erit angulo F B H, atque angulus B F E minor erit angulo B F H, & sic de reliquis, cumque C H sit æqualis comparatæ, & sit*

16.17.18. huius. *maior C D semisse axis recti minoris, omnium ramorum ex origine H ad ellipsim C F B G, cadentium maximus erit H C; & propterea H C maior erit, quàm H F, & in triangulo H F C angulus H F C oppositus maiori lateri maior erit angulo C; estque ostensus angulus E F C maior angulo H F C; igitur in triangulo C E F erit angulus C F E maior angulo F C E; & propterea ramus E C maior erit, quàm E F: simili modo, quia ramus H F propinquior maximo maior est remotiore H B, erit angulus H F B minor angulo H B F: ideoque angulus E F B, pars minoris, adhuc minor erit angulo E B F, maiorem excedente; & propterea in triangulo E F B erit ramus E F propinquior maximo E C, maior remotiore E B, &c.*

Ibidem.

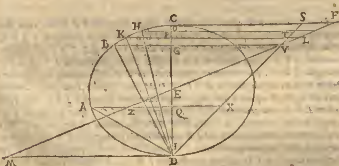
Notæ in Proposit. XX. XXI. XXII.

SI vero fuerit mensura I C minor comparata, quæ sit C F, nempe semisse erecti, & maior dimidio recti E C, & origo sit in recto, aut in eius productione, vt in I; tunc maximus ramorum egredientium ex origine, vt I A, I B, I K, I H est cuius inuersi proportio E G (post absolutionem figuræ cum perpendicularibus, & lineis præcedentibus) ad ab- a

scissam eius potentialis ex mensura cum origine, vt I G est; vt proportio figuræ recti, vt D C ad erectum illius, & quadratum eius, nẽpe quadratum

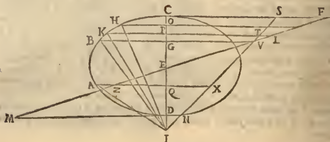
dratum maximi, qui est I B, superat quadratum cuiuslibet illorum exemplari applicato abscissionibus eorum potentialium, &c. *Sensus huius textus penè vix diuinari potest inter tot menda, & phrasis Arabicæ obscuritatem; puto tamen, eum esse, quem in textu apposui, vbi paucula verba immutaui, quæ desiderari videbantur, aliqua verò transposui, vt sensus continuari posset.*

Cæterum animaduertendum est in hisce propositionibus, sicuti in 8. 9. & 10. huius libri supponi vt res manifesta intra sectionem duci posse à puncto originis ramum maximum, vel breuissimum, idest necessario reperiri debere ramum, cuius potentialis abscindit à mensura versus originem rectam lineam, ad quàm inuersa eandem proportionem habeant quàm axis transuersus ad suum erectum: hoc autem sine demonstratione admittere nefas est. Ergo quod in textu desideratur suppleri potest hac ratione. Quia C I maior est, quàm C E, sed minor, quàm C F; ergo eadem E C ad minorem C I maiorem proportionẽ habet, quàm ad C F; & comparando antecedentes ad differentias terminorum C E ad E I maiorem proportionem habebit, quàm E C ad differentiam ipsius C F à C E; quare aliqua magnitudo minor quàm prima scilicet G E ad E I eandem proportionem habebit, quàm C E ad differentiam ipsarum C F, & C E: & iterum comparando antecedentes ad summas terminorum E G ad G I eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F; quare punctum G cadet intra sectionem, pariterq; G B ad axim perpendicularis occurrens sectioni in B cadet intra eandem sectionem: & ideo duci poterit ramus I B, qui ostendetur maximus reliquorum omnium.



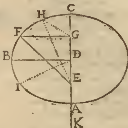
b Quoniam proportio G E ad E I facta est, vt E C ad C F, &c. *Nam vt axis D C ad eius erectum, seu vt semiaxis E C ad semierectum C F, ita facta est E G ad G I: sed propter parallelas G V, & F C: & similitudinem triangulorum E G V, E C F est E G ad G V, vt E C ad C F; & propterea eadem E G ad duas G V, & G I habebit eandem proportionem, & ideo I G æqualis erit G V, & triangulum I G V isoscelеum, & rectangulum erit in G; quare quadratum I G duplum erit trianguli I G V: est verò quadratum B G æquale duplo trapezij G C F V; idest duplo trapezij G C S V, cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B (quod est æquale duobus quadratis I G, G B circa angulum rectum G) æquale est duplo trianguli I G V duplo trapezij G* 1. huius

C S V cum duplo trianguli F S V; idest quadratum I B æquale est duplo trianguli I S C cum duplo trianguli F S V; & quoniam propter parallelas C S, & G V, triangulum I C S simile est isoscelio, & rectangulo triangulo I G V, erit, quadratum I C æquale duplo trianguli I C S isoscelei, & rectanguli in C; ergo excessus quadrati I B supra quadratum I C æquale est duplo trianguli F S V; est verò rectangulum, cuius basis F S, altitudo verò C G æquale duplo trianguli F S V; atque huiusmodi rectangulum est exemplar applicatum ad abscissam G C, vt in notis prop. 16. 17. & 18. *litera* c. *ostensum est igitur quadrati I B excessus supra quadratum I C est exemplar applicatum ad abscissam G C; Simili*



modo quadratum I K ostendetur æquale duplo trianguli I C S vna cum duplo trapezij L T S F; atque dupli trianguli I C S cum duplo trianguli F S V excessus supra duplum trianguli I C S cum duplo trapezij L T S F est duplum trianguli L T V; ergo quadrati I B excessus supra quadratum I K est duplum trianguli L T V, seu exemplar applicatum ad G P differentiam abscissarum. Postea quia triangula similia E C F, E D M sunt æqualia, cum eorum homologa latera E C, E D æqualia sint; ergo addito communi triangulo I E V, erit triangulum E C F cum triangulo E I V, seu triangulũ I C S cum triangulo F S V æquale duobus triangulis E D M, & I E V, seu duobus triangulis M V N, & N I D: erat autem quadratum I B æquale duplo trianguli I C S cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B æquale erit duplo trianguli M N V cum duplo trianguli N I D; estque quadratum I D æquale duplo trianguli isoscelei, rectanguli I D N; igitur quadratum I B superat quadratum I D, estque excessus duplum trianguli M N V seu exemplar applicatum ad G D. Tandem quia quadratum I Q æquale est duplo trianguli isoscelei rectanguli I Q X, atque quadratum Q A æquale est duplo trapezij Q M; igitur quadratũ hypothenusæ I A æquale est duplo trianguli I D N cum duplo trapezij X N M Z; ergo excessus quadrati I A supra quadratum I D æqualis est duplo trapezij X N M Z; excessus autem trianguli N M V supra trapezium N Z est triangulum X Z V; & erat quadrati I B excessus supra quadratum I D, triangulum ipsum M V N bis sumptum. Igitur quadrati I B excessus supra quadratum I A est duplum trianguli X Z V, seu exemplar applicatum ad G Q. Quod autem exemplaria æqualia sint prædictis triangulis bis sumptis, ostensum est in prop. 6. huius.

Notæ in Propof. XXIII. XXIV.



a E Contra linea maxima, ſi non egrediatur ex centro, continet cum mẽſura angulum acutum, & proportio illius inuerſæ ad abſciſſam eius potentialis ex mẽſura cum origine, eſt vt proportio figuræ recti. Si verò fuerit extra centrum, erit perpendicularis ſuper rectum, &c. *Manifeſte nõ nulla in textu Arabico deficiunt; aliqua verò immutari debent; alioquin propoſitio vera non eſſet, itaque legendum puto: E contra ſi maximi rami origo ponatur in axi minore, &c: Vt in textu habetur.*

b Sit ſectio A B C elliptica, & E origo, & E F linea maxima, &c. *Addidi pariter in hac expoſitione verba, quæ deficiunt; nimirum: Sit centrum D, & origo E, quæ ſit in axi minori A C.*

c Et ideo D C ad dimidium erecti eſt linea minor, quàm D C, & ſit D G ad G E, &c. *Nonnulla adiungi debent huic textui corruptiſsimo, ne ſint verba nil prorſus ſignificantia, itaque ſic legendum puto. Et ideo aliqua minor, quàm D C ad reſiduam vſque ad E eandem proportionem habebit, quàm D C ad ſemiſſem erecti; & ſit D G ad G E, &c. Quæ verba breuiſsimè more Apollonij expoſita ſic confirmantur. Quia E C oſtenſa eſt minor dimidio erecti axis minoris C A, fiat C K aqualis dimidio erecti; erit E C minor quàm C K, & ablata communi D C erit D E minor, quàm K D; & propterea D E ad eandem D C minorem proportionem habebit, quàm K D: fiat E D ad D G, vt K D ad D C, erit D G minor, quàm D C: & componendo, E G ad G D eandem proportionem habebit, quàm K C ad C D, & inuertendo, D G ad G E eandem proportionem habebit, quàm D C ſemiſsis axis recti ad C K ſemiſsim erecti eiuſdem axis; & ex G ducatur G F perpendicularis ad axim, quàm, dico, occurrere ſectioni in F termino maximi rami E F.*

d Et ſi maxima fuerit extra centrum, vt D B erit perpendicularis, &c. *Textus euidenter corruptus ſic corrigi debet. Si verò ramus maximus educatur ex centro, vt D B, &c.*

Notæ in Propoſ. XXXV.

a S I producatur vna linearum maximarum, vt E B ad latus illius originis E ad punctum F, fiet maxima linearum egredientium ab illo puncto F G, F H, F I, F A ad ſectionem B I A in directum, & propinquior illi maior eſt remotiore, &c. *Immutaui nonnulla, quæ ad propoſitionis integritatem facere videbantur: vt in textu habetur.*

Erit angulus B H E maior, quàm E B H, &c. *Eo quod ramorum omnium ab origine E ad ellipsim C B H cadentium maximus supponitur E B; ergo maior erit, quàm E H, & propterea angulus E B H minori lateri oppositus minor erit angulo E H B: cadit vero recta H F infra H E; propterea quod punctum F infra punctum E existit; igitur angulus F H B maior est angulo E H B; & ideo angulus F H B multo maior erit angulo F B H; igitur ramus F B, maiorem angulum subtendens, maior erit, quàm F H, &c.* b

SECTIO DECIMAOCTAVA

Continens XXXII. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XXXX. XXXXVII. XXXXVIII. Proposit. Apollonij.

PROPOSITIO XXXII.

IN ellipsi A B C rami cuiuslibet maximi G H vtrumque axim secantis portio N H inter axim maiorem, & sectionem intercepta, est linea breuissima. a

Producatur rectus axis minor A D vltra centrum D ad I, G, & ex I, G ad sectionem ducantur duo rami maximi G H, I K, qui secent transuersum B D in N, M, & sit B E dimidium erecti axis B D, & A F dimidium erecti axis A G; & educantur perpendiculares ad axes H O, H P, K Q, K R. Dico, N H breuissimum esse ramorum egredientium ex H. Quia G H est linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, vt D O ad O G (22. ex 5.) nempe N H ad H G, seu N P ad b

PD;

P D; ergo B E semissis erecti ad B D semissim transuersi est, vt N P ad P D, & ideo N H est breuissima linearum egredientium ex N (10. ex 5.) & sic ostendetur, quod si K I fuerit maximus, erit K M breuissima.

PROPOSITIO XXXIII. XXXIV.

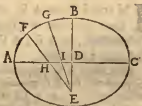
a E Contra ostendetur, quod duæ breuissimæ, si producantur ad partes suarum originum vsque ad axim minorem rectũ ellipsis, fient duo maximi; & lineæ maximæ mutuò se secant inter transuersum, & rectum in eadem parte, & quod continent cum mensura angulos, quorum proximior vertici sectiouis maior est.

b Quia D Q ad Q I est, vt D O ad O G, quia quælibet earum est, vt D A ad A F (22. ex 5.) diuidendo, & permutando, fiet D Q minor ad D O maiorem, vt D I ad D G; ergo D I minor est, quàm D G, & K Q maior, quàm H O; quare angulus I maior est, quàm G; igitur H G, K I, se mutuo secantes, conueniunt in L.

Et constat, quod occursus duarum breuissimarum (si producantur versus suam originem) erit intra angulum contentum à duabus medietatibus axium ellipsis B D, D C supra vnum eorum, nempe punctum L cadit intra angulum B D C. Quoniam breuissimæ N H, M K se mutuò secant, si producantur ad partes suæ originis (28. ex 5.) occurrent vtique extra B D, & intra A G (33. ex 5.) & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXV.

a SI per centrũ ellipsis transierit vna duarum breuissimarum, vtique rami egrediẽtes ab eorum occursu ad sectionis quadrantem alterius breuissimæ habebunt proprietates expositas in propositionibus 54. & 55.

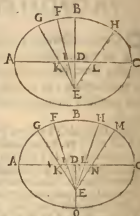


In ellipsi A B C sit punctum E occursus duarum breuissimarum B D, C I, & centrum sectionis D: & ex E educamus E F, quæ secet transuersum axim in H. Dico, quod H F nõ est breuissima, & quod breuissima egrediens ex F abscindit ex sagitta A C cum A lineam maiorem, quàm A H. Quoniam G I est breuissima; igitur F H, si esset quoque breuissima, occurreret ipsi G I intra angulum A D E: sed non occurrit ei, nisi in E, 34. huius. ergo F H non est breuissima; & quia F E non cadit inter duas breuissecantes E B, E G; ergo breuissima, egrediens ex F, abscindit ex sagitta lineam maiorem, quàm A H (54. ex 5.) quod erat ostendendum.

PROP.

PROPOSITIO XXXVI.

IN ſectione elliptica quatuor lineæ breuiſſimæ, vt B D, F I, G K, H L, non conueniunt omnes in vno puncto.



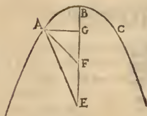
Alioquin ſit occurſus in E, & prius ſit B D perpendicularis ſuper A C, tranſiens per D centrum ſectionis; & quia E eſt occurſus duarum breuiſſimarum B D,
35. huius. F I, & B E tranſit per centrum; igitur G K non eſt linea breuiſſima, quod eſt contra hypotheſim. Si vero nullus corũ tranſit per centrum, educamus per centrum D O perpendicularem ad A C; quare duæ breuiſſimæ F I, G K conueniunt intra angulum A D O (34. ex 5.) ſimiliter H L, M N breuiſſimæ occurrunt intra angulum C D O (34. ex 5.) ſed cõueniunt in E, quod eſt abſurdum; igitur quatuor lineæ breuiſſimæ non cõueniunt in vno puncto; quod erat oſtendendum.

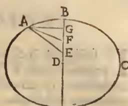
PROPOSITIO XXXVII. XLVI.

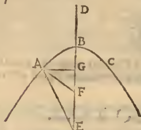
IN coniſectione A B, cuius centrum D duci non poſſunt duæ lineæ maximæ in ellipſi, neque duæbreuiſſimæ in omnibus ſectionibus, vt A E, A F ad vnum punctum A circumferentiæ ſectionis terminatæ.

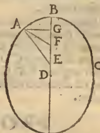
Educamus A G perpendicularem ad axim B E. Si itaque ſectio fuerit parabole, fiet E G æqualis F G, quia quælibet earum eſt æqualis dimidio erecti (13. ex 5.) ſi vero fuerit hyperbole, aut ellipſis, fiet D G ad G E, vt D G ad G F; quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ (14. 15. ex 5.) igitur G F æqualis eſt G E, quod eſt abſurdum. Similiter ſi B G fuerit minor duarum axium ellipſis, & fuerint A E, A F rami maximi oſtendetur, quod G F æqualis ſit G E (23. ex 5.) Patet igitur, vt dictum eſt, quod ex vno puncto ſectionis educi non poſſunt ad axim illius duæ lineæ maximæ, neque breuiſſimæ, & hoc erat oſtendendum.

PROP.





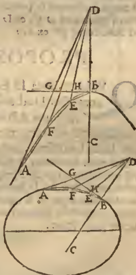




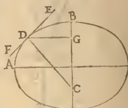
PROPOSITIO XXXVIII.

SI linea maxima, aut breuissima, vt C B, producatur extra sectionem A B ad D, erit eius portio B D extra sectionem abscissa minima omnium linearum D E, D F, D A egredientium ab illo puncto ad circumferentiam sectionis: reliquarũ vero propinquior, illi minor est remotiore.

a Educatur B G, tangens sectionem in B; erit D B minor, quàm D H; ergo multo minor est, quàm D E: & iungamus F E, F A, erit angulus F E D obtusus, & propterea D E minor est, quàm D F, & similiter D F minor, quàm D A; quod erat ostendendum.



PROPOSITIO XXXIX.



IN sectione A B elliptica quælibet perpendicularis F D ad lineam maximam C D, ab eius termino D in sectione posito educta, continget conisectionem.

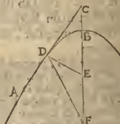
Alioquin secet illam, & in eius productione D G sumatur punctum G intra sectionem: & educamus B G C, igitur G C maior est, quàm C D, quia subtendit rectum angulum C D G, & propterea B C multo maior est, quàm C D, quod est absurdum; igitur educta illa linea est tangens; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXX.

E Contra si fuerit F D tangens, erit perpendicularis super maximam D C.

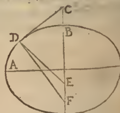
Alioquin educamus aliam E D perpendicularem super illam; ergo E D tangit sectionem in puncto D (39. ex 5.) sed F D supposita fuit tangens; igitur duæ D F, & D E tangunt sectionem in vno puncto, quod est absurdum (36. ex 1.)

PROPOSITIO XXXXVII.



QVælibet linea D E ex puncto contactus D ad axim alicuius sectionis A B educta perpendicularis ad tangentem D C, erit linea breuissima, aut maxima.

Ex 10. & 20. huius. Alioquin educamus D F breuissimam, vel maximam; ergo D C perpendicularis 40. huius. est super D F; sed C D supposita fuit perpendicularis super D E; quod est absurdum: quapropter demonstratũ est, quod fuerat propositum.



PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

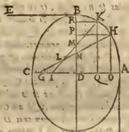
a TRes lineæ maximæ E F, G H, I K ad vnum ellipsis quadrãtem A F B cadentens non cõueniunt in vno puncto.



Alioquin cõueniant in O, & quia sunt lineæ maximæ erunt M K, H N, L F, lineæ breuissimæ (32. ex 5.) & conueniunt in puncto O; quod est absurdũ (54. ex 5.) ostensum ergo est, quod fuerat propositũ.

Notæ in Proposit. XXXII.

a LInea maxima secat transuersam in puncto, cuius intercepta inter punctum illud, & sectionem, est linea breuissima, &c. *Verba, quæ in textu Arabico desiderantur supplenda censui, vt æquiuocationes tollerentur.*



b Quia G H est linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, &c. *Quia in 22. huius ostensum est, linea maxima G H potentialem H O secare semiaxim minorẽ A D in O, vt sit D O ad O G in eadẽ proportione figuræ axis minoris A C; scilicet erit, vt D A semiaxis minor ad A F eius semierectum; sed vt A D ad A F, ita est B E semissis lateris recti axis transuersi ad B D semissem eiusdem transuersi; igitur D O ad O G eandem proportionem habebit, quàm E B ad B D; sed propter parallelas N D, H O, est N H ad H G, vt D O ad O G; pariterque propter parallelas D G, H P, erit N P ad P D, vt N H ad H G; & propterea N P ad P D eandem proportionem habebit, quàm D O ad O G, seu quàm E B ad B D; & permutando D P ad P N erit, vt D B ad B E, seu vt axis transuersus ad eius erectum; & propterea linea N H erit breuissima.* Ex 15. lib. 1. 15. huius.

Notæ in Proposit. XXXIII. XXXIV.

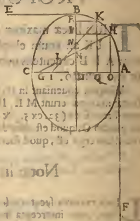
a E Contra ostendetur, quod duæ breuissimæ, si educantur ex parte suæ originis ad rectum, fient duo maximi cum relatione ad rectum: Et

 osten-

ostendetur ex dictis, quod lineæ maximæ mutuò se secant inter diametrum, & rectum, &c. *Textū corrigi debere manifestum est ex dictis superius.* b

Quia D Q ad Q I est, vt D O ad O G, &c. *In eadem figura propositionis 32. præcedentis perficiatur constructio, vt prius; quia duæ K M, H N sunt breuissimæ lineæ; ergo M R ad R D, nec non N P ad P D eandem proportionem habent, scilicet eam quàm habent latus rectum ad transuersum, seu eandem quàm habet semierectus E B ad semiaxim B D; est verò C A ad eius latus rectum, seu D A ad A F, vt E B ad B D; igitur iam M R ad R D, quàm N P ad P D eandem proporitonem habent, quàm D A ad A F; sed propter parallelas C D, R K, P H, est M K ad K T, vt M R ad R D; pariterque N H ad H G eandem proportionē habet, quàm N P ad P D; atque propter parallelas D B, Q K, O H est D Q ad Q I vt M K ad K I, & D O ad O G est vt N H ad H G; ergo tam D Q ad Q I, quàm D O ad O G eandem proportionem habent, quàm D A ad A F, seu quàm axis minor A C ad suum erectum, & propterea tam K I, quàm H G est ramus maximus; igitur si duæ lineæ breuissimæ H G, & K I producantur quousque axim minorem secent in punctis G, & I efficientur rami omnium maximi. Postea quia D Q ad Q I, est vt D O ad O G; permutando D Q ad D O eandem proportionem habebit, quàm Q I ad O G; & permutando, & comparando antecedentes ad differentias terminorum erit D Q ad D I, vt D O ad D G; estque D Q minor quàm D O; igitur Q I minor est, quàm O G; pariterque D I minor est, quàm D G; & propterea punctum I cadit inter axim B D, & ramum H G; estque etiam potentialis K Q propinquior & parallela axi maiori, & ideo maior remotiore H O; igitur punctum K cadit inter axim B D, & ramum H G; & propterea ramus K I secat ramum H G in puncto L inter puncta H, & G: sed duæ breuissimæ K M, H N se secant vltra axim B D; igitur occursus L cadit intra angulum B D C ab axibus comprahensum. Tandem quia K I secat H G inter puncta G, & H; ergo efficit angulum externum K I A maiorem interno, & opposito G: & propterea ramus K I propinquior vertici B, quàm H G efficiet cum axe minore C A angulum A I K maiorem.*

Pr. 15. huius. 15. lib. 1. 20. 21. 22. huius. 36. huius.

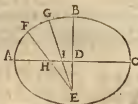


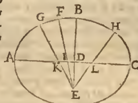
Notæ in Proposit. XXXV.

SI transeat per centrum ellipsis vna duarum breuissimarum; vtique rami, &c. *Hæc propositio parum differt à 34. & 35. huius, vbi ostensum est, quod si duo rami E B, E G breuiſecantes ex eodem concursu E ad ellipsim A B ducuntur, quilibet alius ramus E F, extra breuiſecantes positus, cadet supra breuissimam ex puncto F ad axim A C ductam: hic verò supponuntur duæ breuis-* a

breuissima B D, G I, quarum B D per centrũ transit, quæ productæ concurrunt in puncto E axis minoris, & concluditur, quod rami E F, portio F H, nedũ breuissima non est, sed supra ipsam breuissimã ex puncto F eductam cadit.

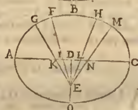
Sed duo hic notanda sunt. Primo, quod hæc prop. 35. non poterat postponi, nã vsum habet in 57. huius vbi malè citatur prop. 52. loco huius 35., vt ibidem insinuatum est. Secundo, quod hæc demonstratio non videtur omnino perfecta nam pendet ex prop. 34., & ex eius conuersa, quæ demonstrata non reperitur quare superuacanea non fuit noua demonstratio in Lemmat. 8. apposita.





Notæ in Prop. XXXVI.

a SI verò nulla earum transit per centrũ, educamus D O, &c. *Si enim fuerint quatuor lineæ breuissimæ G K, F I, H L, M N, quarum nulla per centrum D transit, similiter ostendetur, quod non conueniunt in vno puncto E; nam ducto semiaxe minori D O necesse est, vt punctum E concursus duorũ breuisecantiũ E G, E F cadat intra angulũ A D O; pariterque idem punctum E concursus duorum breuisecantium E H, E M, cadet necessario intra angulum C D O; sed idem punctum E nequit duobus in locis reperiri, nimirũ intra angulum A D O, & intra angulum C D O, igitur non possunt ab eodẽ puncto educi ad ellipsim quatuor rami breuisecantes.*



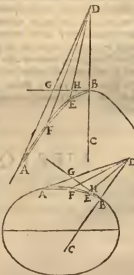
34. huius.
Ibidem.

Notæ in Prop. XXXVIII.

a NAm si educamus B G tangentem erit B D minor quàm D H, &c. *Quoniam C B est linea breuissima, aut si maxima est, eius portio erit breuissima, & G B cõtingens sectionem in eius termino B perpendicularis ad B C; propterea in triangulo B D H latus H D, subtendens angulum rectum B, maius erit latere D B; est verò D E maior, quàm D H, eo quod punctum H contingentis B G cadit extra sectionem; igitur linea B D minor est, quàm D E, & propterea angulus D E B acutus erit, quare est minor obtuso*

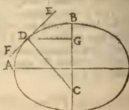
32. huius.

29. 30. huius.



angulo D B E; cadit verò F E infra rectam B E, quam secat in E, propter curuitatem sectionis F E B; igitur angulus D E F obtusus quoque erit, & angulus D F E acutus; & propterea recta linea D E minor erit, quam D F; eadem ratione ostendetur D F minor, quàm D A.

Notæ in Proposit. XXXIX.



a Alioquin secet illam, & secemus ex, & D G intra sectionem, &c. *Si enim recta F D non contingit ellipsim A B, secet eam si fieri potest in D: quare F D producta in directum cadet intra sectionem, & in producta recta linea F D G sumatur quodlibet punctum G dummodo intra sectionem existat, & per G ad concursum C coniungatur recta linea G C, qua producta occurrat sectioni in B: & quia ex hypothesi recta F D G perpendicularis erat ad maximum ramum D C, ergo in triangulo D G C rectangulo erit hypothenusa G C maior quàm D C, & ideo B C multo maior erit quàm D C; quod est absurdum, supposita enim fuit D C omnium maxima earum, quæ ex C ad sectionem A B duci possunt.*

Notæ in Proposit. XXXXVIII.

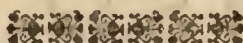


a Alioquin occurrant in O, quia istæ lineæ sunt maximæ, &c. *Secant enim lineæ maximæ semiaxim maiorem D A in punctis M, N, & L: & siquidem tres lineæ maximæ conueniunt in vnico puncto O,*
32. huius. *erunt segmenta inter axim maiorem, & sectionem intercepta, nimirum M K, N H, L F lineæ breuissima; quarum duæ quaquè L F, N H educuntur ab eodem puncto concursus O: igitur (ex 54. 55. huius) tertius ramus O K ab eodem concursu O eductus non erit breuisecans; quod est contra hypothesim.*

LIBRI QVINTI FINIS.



APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VI.



DEFINITIONES.

I.



Ectiones ÆQVALES ſunt, quæ ad inuicem ſuperpoſitæ ſibi mutuò congruunt.

II.

SIMILES verò ſunt; in quibus omnes potentiales ad axium abſciſſas vtrobique ſunt in iiſdem rationibus, tum abſciſſæ ad abſciſſas.

III.

Et linea, quæ ſubtendit ſegmentum circumferentiæ circuli, aut ſectionis coni vocatur BASIS illius ſegmenti.

IV.

Et linea, quæ bifariam diuidit ordinationes æquidiſtantes baſi illius, vocatur DIAMETER illius ſegmenti.

V.

Et eius terminus, qui eſt ad ſectionem, VERTEX ſegmenti.

VI.

Et SEGMENTA ÆQVALIA ſunt, quæ ſuperpoſita ſibi mutuò congruunt.

VII.

Et SIMILIA ſunt, quorum baſes cum diametris æquales angulos continent, & in eorum ſingulis ductæ lineæ baſi parallelæ numero æquales ad abſciſſas diametrorum ſunt in iiſdem rationibus tum abſciſsæ ad abſciſsas.

VIII.

VIII.

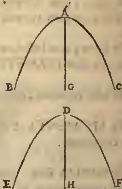
CONI SIMILES sunt, quorum axes æquè ad bases inclinati, ad diametros basium proportionales sunt.

IX.

Et dicitur conus continere sectionem, & sectio in cono posita esse, si sectio tota fuerit in superficie coni, aut cadat in illa, si producatur ex parte basis.

N O T Æ.

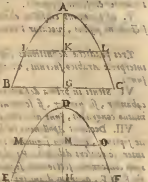
DEfinitiones huius sexti libri ferè omnes sunt Appollonij, in paucis quidem alteratæ ab interprete Arabico: quod quidem constat testimonio Eutocij Ascalonitæ, qui in tertiam propositionem secundi æquiponderantium Archimedis affert definitionem similium portionum conicarum sectionum, traditam ab Apollonio in eius sexto libro: & sanè ordo doctrinæ exigebat, vt prius sectiones æquales, & similes definirentur, vt postea earum symptomata demonstrari possent: sed animaduertendum est, hactenus nomen sectionis conicæ significasse quamlibet indeterminatam portionem curuæ lineæ in coni superficie ortam ex sectione alicuius plani non per verticem coni ducti, non considerando terminos eius neque mensuram. Segmentum verò significat portionem aliquam sectionis conicæ determinata mensura, & certis finibus terminatam; at multoties significat superficiem à conisectione, & recta linea eam subtendente contenta. Igitur ad confusionem vitandam vocabo huiusmodi superficiem planam, Mixtam superficiē sectionis conicæ. Modò in relatis definitionibus prius quænam conisectiones vocari debeant inter se æquales exponit Apollonius.



I. *Et primo; Si fuerint duæ qualibet conisectiones B A C, E D F, quarum axes A G, D H; vertices verò A, & D, & siquidem intelligatur sectio B A C superposita sectioni E D F, vt nimirum vertex A super verticem D cadat, atque axis A G super axim D H, atque pariter peripheria B A C, & E D F sibi mutuò congruant: tunc quidem vocantur duæ dictæ sectiones conicæ æquales inter se. Vbi notandum est, non oportere longitudinem curuæ B A C æqualem esse longitudini curuæ E D F; sicuti, vt duo anguli rectilinei dicantur æquales, & sibi mutuò congruentes, necesse non est, vt rectæ lineæ, angulos continentes, sint æquales longitudine, dummodo certum sit, quod lineæ ipsæ vlterius productæ semper sibi mutuò congruant; sic pariter peripheriæ conicarū sectionum A B, & D E, si vlterius producantur, semper sibi mutuò congruent.*

II. *In*

II. *Codex Arabicus habet*. Similes verò sunt, quarum proportio potentium in vna earum ad sua abscissa est eadem proportioni aliarum potentium ad sua abscissa, & proportio abscissarum in vna earum ad sua opposita abscissa eadem est. *Putabit forte quispiam, me nimis licentiosè transformasse potius, quàm emendasse textum in hac secunda definitione; sed is sciat velim, non meo arbitratu id fecisse sed ex prascripto eiusdem Apollonij pluribus in locis; non quidem in hisce compendiosissimis definitionibus, in quibus vna particula omissa, vel addita (vt passim cōtingit in codicibus vetustissimis) sensum omninò permutat; sed ijs in locis in quibus oratione continua exponit, & exemplis declarat germanum sensum huius secundæ definitionis, & septima subsequentis, vt suis in locis monebitur. Primo igitur suppleri debent particulæ* ad conterminas axium abscissas, *quæ in textu omnino subintelligi debent vt expressè declaratur in propos. 11. 12. 15. & 16. huius libri, quibus in locis semper in sectionibus similibus præcipitur vt abscissa tantummodo in axibus sumantur, aut æquè sint inclinatæ ad conterminas potentiales. Secundò postrema verba* sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad abscissas *possent retineri cũ sensum definitionis non omnino intollerabilẽ reddant; & insuper in textu græco Eutocij repetantur, & eius sensus talis est. In conisectionibus B A C, E D F, quarum axes A G, D H si ductæ fuerint quotcunq; potentiales, seu ad axim applicatæ B C, E F, I L, M O occurrentes axibus in G, H, K, N hac lege, vt potentialis B C ad abscissam G A eandem proportionem habeat quàm potentialis E F ad abscissam H D, & potentialis I L ad abscissam K A sit, vt M O ad N D, & tandem abscissa G A ad K A sit, vt abscissa H D ad N D: & hoc verificetur in omnibus alijs potentialibus eadem lege ductis; tunc quidem duæ illæ sectiones similes appellantur iuxta Eutocij, & Mydorgij sententiam.*



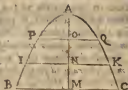
Ego contra puto, hanc expositionem neq. Apollonio, neq. veritati conciliari posse, vt ad propos. 12. ostendetur attamen existimo, definitionem hac ratione formari posse.

Similes conisectiones sunt, in quibus quælibet axium abscissa erectis proportionales etiam ad conterminas potentiales eandẽ rationem habent: quæ omnino conformis est præcedenti definitioni, præterquam in postrema particula, vbi enim ait. Sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad abscissas. *Legendum esset:* sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad erecta. *Sed an hæc particula corrigi debeat, vel non, alij videant.*

III. *Si verò fuerit portio sectionis conicæ B A C, vel circunferentia circuli, atq. recta linea B C eam subtendat, & secet in duobus punctis B, & C, vocatur B C, Basis prædicti segmenti B A C.*

IV. Et

IV. *Et si in eodem segmento ducantur ordinatæ parallelæ basi B C, atque recta linea A M secet omnes æquidistantes ipsi B C bifariam in punctis M, N, & O vocabitur A M Diameter eiusdem segmenti.*

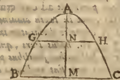


V. *Et terminus eiusdem diametri A ad sectionem positus, vocatur Vertex segmenti.*

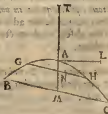
Tres prædictæ definitiones superadditæ ab interprete Arabico fuerunt, vt ego puto, quandoquidem omnino necessariæ non sunt.

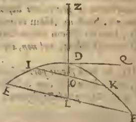
VI. *Sicuti in prima definitione sectiones sibi mutuò congruentes æquales vocabantur, sic pariter, si segmentum B A C superpositum segmento E D F sibi mutuò congruant, sunt duæ illæ lineæ curuæ æquales inter se.*

VII. *Declarat Apollonius in hac definitione septima, quænam segmenta conica similia inter se censeri debeant. Vt si fuerint duarum conicarum sectionum segmenta B A C, & E D F, quarum diametri A M, & D L efficiant cum ordinatim applicatis, seu cum basibus B C, & E F angulos æquales in M, & L, & in vnaquaque earum ductæ fuerint pares multitudines applicatarum, quæ sint basibus æquidistantes, vt G H, & I K, & in eis verificentur hæ conditiones, vt habeat B C ad abscissam M A eandem proportionem, quam E F ad abscissam L D, & G H ad abscissam N A eandem proportionem habeat, quam I K ad abcissam O D, & tandem abscissa M A ad abscissam A N eandem proportionem habeat, quam abscissa L D ad abscissam D O; tunc quidem vocat Apollonius duo segmenta B A C, & E D F similia inter se. Et hic primo animaduertendum est, definitionem segmentorum similium relatam ab Eutocio Ascalonita in 3. prop. lib. 2. æquipond. Archimedis, non esse integram: in ea enim desiderantur illa verba*, quarum bases cum diametris continent angulos æquales, *sine quibus definitio esset erronea, vt optime notat Mydorgius. Hoc autem ita esse verba textus Arabici aperte declarant, habent enim.* Et similia sunt, quorum bases continent cum diametris angulos rectos *legẽdum æqua-*



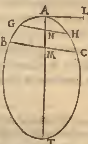


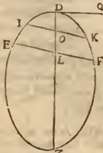




les,

les, & educantur in quolibet eorum ordinationes ad suas bases numero æquales, quarum proportio cum diametris est, vti diximus in sectionibus similibus. *Idem repetit in propos. 15. huius lib. rursus in propos. 16. litera a inquit:* Et quod anguli à potentialibus, & abscissis contenti sint æquales in duobus segmentis, erit segmentum H A G simile segmento I C K: &c. *& propos. 17. litera c ait:* & anguli comprehensi à potentibus, & abscissis sunt æquales; &c. propterea duo segmenta sunt similia; *Et in eadem propos. litera d dicit.* Quia propter similitudinem duorum segmentorum continebunt potentes cum suis abscissis angulos æquales. *Et eodem modo semper loquitur Apollonius; quare dubitandum non est, in Eutocij definitione hæc eadem verba desiderari.*





Immutaui postea verba subsequentia; nam ordinationes, seu ordinatim applicatæ ducuntur ad diametros, non ad bases, & debent esse basibus æquidistantes. Deinde breuitas affectata postremæ partis huius definitionis non Apollonio, sed Arabico Interpreti tribui debet, nam eadem expresse, & extense declaratur in textu Eutocij his verbis. In quarum singulis ductis lineis basi parallelis numero æqualibus, sint ipsæ parallelæ, & bases ad abscissas diametrorum partes sumptas à verticibus in iisdem rationibus, tum abscissæ ipsæ ad abscissas. *In textu verò Arabico hæc non habentur expressè, sicut in secunda definitione, quàm citat hisce verbis.* Et educantur ex quolibet eorum ordinationes basibus parallelæ numero æquales, quarum proportio cum diametris est, vti diximus in sectionibus similibus.

MONITVM.



AMOR veritatis, & muneris suscepti ratio exigere videtur, vt definitiones sectionum conicarum similium, quæ circumferuntur, accuratius examinentur, ne (vt Mydorgij verbis vtar) à magnis nominibus (Eutocium dico, Commandinum, & Mydorgium) præiudicium diutius fiat veritati, hoc autem ad propos. 11. 12. huius lib. præstabo. Interim monendus es Lector, in definitione ab Eutocio relata aliqua verba deficere (nimirum quod abscissæ in axibus, aut diametris æquè ad ordinatas inclinatis sumantur) in definitionibus Commandini aliquod desiderari, & eas merito re-

rito reiectas à Mydorgio fuiſſe, nam licet latera tranſuerſa proportionalia ſint lateribus rectis, non tamen duæ eiuſdem nominis ſectiones ſimiles erunt, niſi diametri æquè inclinatæ ſint ad ordinatim ad eas applicatas: tandem definitionem Mydorgij ſimilium ſectionum pariter imperfectam eſſe ſuſpicor; nam licet duæ ſectiones, quibus competit tradita definitio, ſeu paſsio eiuſdem definitionis, ſint reuera ſimiles, non tamen è conuerſo ſimilibus ſectionibus conuenit ſolummodo definitio, ſeu eius paſſio, cum aliquando appoſita paſsio in eiſdem reperiatur: quod perinde eſt, ac ſi quis putaret triangulum æquilaterum aliquando latera inæqualia habere poſſe.

VIII. *In hac definitione manifeſtè aliquid deſideratur: inquit enim* (Coni ſimiles ſunt quorum axium proportio ad diametros ſuarum baſium eadem eſt.) *Quod quidem verificatur tantummodo in conis rectis: at in ſcalenis debent neceſſario axes conorum efficere æquales inclinationes ſuper baſes: Quod quidem in ſequentibus propoſitionibus manifeſtè ab Apollonio declaratur. Itaque textum hac ratione reſtitui debere puto. Coni ſimiles ſunt, quorum axes æque ad baſes inclinati ad diametros baſium proportionales ſunt.*

IX. *Sectio genita in ſuperficie coni à plano eum ſecante, non per verticem eius ducto dicitur in dicto cono poſita, & contenta; & conus ille continere dicitur eandem ſectionem: & licet coniſectio exhibeatur extra conum; dicetur nihilominus contineri ab illo cono, in quo ſectio illa accomodari poteſt, ſeu in quo ab aliquo plano ſecante effici poteſt in coni ſuperficie eadem illa coniſectio.*

SECTIO PRIMA

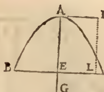
Continens Propoſit. I. II. IV. & X.

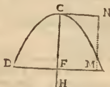
PROPOSITIO I.

QVælibet duæ ſectiones parabolicæ A B, C D, ſi habuerint axium erectos A I, C N æquales; erunt inter ſe æquales. Si verò duæ illæ ſectiones fuerint æquales, erunt axium erecta æqualia inter ſe. a

Quoniam ſuperpoſita axi C H ſuper axim A G, cadet ſectio C D ſuper ſectionem A B: ſi enim cadere non concedatur ſuper illam, ſignetur (ſi fieri poteſt) punctum eius D, extra ſectionem A B cadens: & educatur D F perpendicularis ad axim; & perficiatur planum rectangulum F N, & ab axi A G ſecetur A E æqualis C F; & educatur ex E perpen- b

pespendicularis B E, & perficiatur planũ E I. Et quia A I, A E æquãtur C N, C F, vnaquæque suo homologo: igitur planum I E, nempe (12. ex 1.) quadratum B E æquale est rectangulo F N, nempe quadrato D F (12. ex 1.) ergo B E æqualis est D F; si autem superponatur axis axi cadet D super B, quæ tamẽ haud cadere concessum fuerat: & hoc est absurdum; ergo fieri non poteſt, vt duæ sectiones æquales non sint. 11.lib. 1. Ibidem.

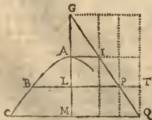


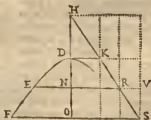


C Præterea supponamus duas illas sectiones æquales esse inter se, & fiat F C æqualis E A, & educamus ad axes perpendiculares B E, D F, & perficiamus plana rectangula F N, E I. Quia sectio A B cadit super sectionem C D, & A E super C F cadet; alioquin essent in eadem parabola duo axes: ergo F cadit super E, & D super B, & propterea B E potens planum E I (12. ex 1.) æqualis erit D F potenti planum F N (12. ex 1.); ergo duo plana sunt æqualia; sed sunt applicata ad æquales F C, A E; igitur C N, A I erectæ æquales sunt. Et hoc erat ostendendum. 11.lib. 1. Ibidem.

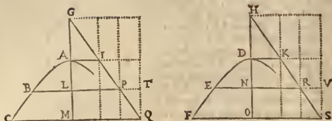
PROPOSITIO II.

SI duæ sectiones hyperbolicæ, aut duæ ellipses A B C, D E F habuerint axium figuras G I, H K similes, & æquales;
a duæ illæ sectiones æquales erunt. Si verò duæ sectiones æquales
b fuerint, earũ figuræ axiũ erunt æquales, similes, & similiter positæ.





 Quoniam



Quoniam facta conuenienti superpositione axis A M super axim D O, cadet quoque sectio A B super sectionem D E: si enim non cadit super illam, sumatur (si fieri potest) eius punctum B, extra sectionem D E cadens; & producatur ad axim perpendicularis B L vsque ad P: & perficiatur planum A P applicatum comparatum; & secetur D N æqualis A L, & erigatur per N ad axim perpendicularis N E, & producatur vsque ad R, perficiendo planum D R applicatum comparatum; Et quia A I æqualis est D K, & A L æqualis D N: erit planum I L, æquale plano K N; cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, pariterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia: & propterea E b
11. 13. lib. 1. N, B L, quæ illa spatia possunt (13. 14. ex 1.) sunt æquales. Si autem superponatur axis axi cadet B L super E N, eoquod duo anguli N, & L sunt æquales; igitur B cadit super E, quod prius cadere non concedebatur: & hoc est absurdum. Quapropter sectio sectioni æqualis est.

Deinde ponamus duas sectiones æquales, vtique congruet sectio A B sectioni D E, & axis A L axi D N, quia si non cadit super illum, essent in hyperbola duo axes, & in ellipsi tres axes, quod est ab- c
48. lib. 2. surdum (52. 53. ex 2.) Et fiat A L æqualis D N, & reliqua perficiantur, vt prius cadent duo puncta L, B super N, E; ideoque B L æqualis erit E N; & poterunt æqua- d
12. 13. lib. 1. lia rectangula A P, D R applicata ad æquales A L, D N (13. 14. ex 1.) ergo L P æqualis est N R. Similiter ponatur A M æqualis D O, & educantur C M Q, F O S duæ ordinationes, ostendetur, quod M Q æqualis est O S, & L M æqualis N O; & propterea duo plana P Q, R S sunt æqualia, & similia; igitur duo plana G P, H R sunt æqualia, & similia, & L P ostensa est æqualis N R: ergo G L æqualis est H N, & A L æqualis D N; & propterea G A æqualis est D H, & A I æqualis D K.

Quapro-

Quapropter duæ figuræ G I, H K sunt æquales, & similes. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IV.

a Simili modo demõstrabitur, quod duæ sectiones oppositæ sint similes, & æquales.

Eo quod axis inclinatus est communis, & erecti sunt æquales (16. ex 1.) & propterea earum figuræ æquales quoque sunt inter se. Et hoc erat propositum.



14. lib. 4.

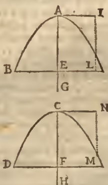
PROPOSITIO X.

a Pariter constat, quod si potentiales cum suis abscissis cõpræhendant angulos æquales obliquos, eadem consequentur, quæ prius dicta sunt.

Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. I.

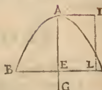
a Quælibet duæ sectiones parabolicæ, vt A B, C D, quarum relationes sunt duo plana A L, C M, & erecti earum A I, C N æquales. ipsæ quoque sunt æquales. Si verò duæ illæ sectiones fuerint æquales, vtique earum applicata, & erecti erunt æquales, &c. *Verba illa propositionis (* applicata sunt duo plana A L, C M, &c. *) casu in textum irrepsisse puto, eo quod rectangula illa A L, C M, nedum æqualia non supponuntur, sed è contra construuntur, atque demonstrantur æqualia esse inter se.*



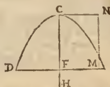
b Quia si ponamus sagittam C H super sagittã A G, cadet sectio C D super sectionem A B: si verò non cadit super illam, signemùs super literam, in quam non cadit punctum D: &c. *Sic legendũ puto. Quo-*

niam,

niam , ſuperpoſita axi C H ſuper axim A G , &c. vt in textu habetur . Si enim axis C H ſuper axim A G applicatur , ita vt vertices A , C coincidant , neceſſariò ſectio C D cadet ſuper ſectionem A B alias aſſignari poſſet punctum eius D , extra ſectionem A B cadens.



c Præterea ponamus duas ſectiones æquales, & C F æqualis A E, &c. *Textum corruptum ſic reſtituendum cenſeo . Præterea ſupponamus , duas illas ſectiones æquales eſſe inter ſe , & fiat C F æqualis A E , educamus ad axes perpendiculares B E , D F , &c. Sic enim diſtinguitur hypotheſis propoſitionis à conſtructione eius.*

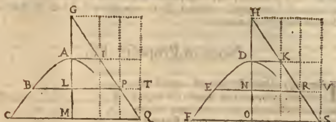


d Ergo ſectio A B cadit ſuper ſectionem C D, & A E ſuper C F : alioqui eſſent ſectioni parabolicæ duo axes ; ergo F cadit ſuper E, &c. *Quoniam (ex hypotheſi) ſectiones A B , & C D æquales ſunt , facta intellectuali conuenienti ſuperpoſitione , ſibi mutuò congruent , & vertex A cadet ſuper verticem C . Dico iam , axim A E cadere ſuper axim C F : alioquin in eadem parabola , ſcilicet in duabus parabolis ſibi congruentibus à communi vertice C , vel A , duo axes A E , & C F ducerentur : quod eſt impoſſibile . Quare axis A E cadit ſuper axim C F .*

Notæ in Propoſit. II.

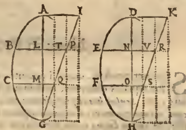
a SI fuerint figuræ duarum ſectionem hyperbolicarum , aut duarum ellipſium, vt duo plana G I , H K in A B , D E ſimiles , & æquales; vtique duæ ſectiones æquales erunt : ſi vero duæ ſectiones ſint æquales earum figuræ erunt æquales , ſimiles , &c. *In duabus ſectionibus A B , & D E ſumi debent figuræ G I , & H K , non qualeſcunque , ſed illæ , quæ ad axes fiunt , nimirum debent eſſe G A , & H D axes inclinati , ſeu tranſuerſi , & A I , atque D K eorum latera recta ; tunc quidem , ſi figuræ axium G I , H K fuerint ſimiles , & æquales , conicæ ſectiones B A , D E æquales quoque oſtenduntur in propoſitione . Quod verò particula illa (* axium*) deſideretur in textu propoſitionis , conſtat ex primis verbis immediatè ſequentis conſtructionis . Inquit enim .* Quoniam ſi ponamus axim A M ſuper axim D O, &c.

b Cumque G I , H K ſint duæ figuræ ſimiles , & æquales , pariterque I P , K R ; ergo duo plana A P, D R ſunt æqualia, &c. *Quia rectangula I P , G I circa communem diametrum G I P conſiſtunt , erunt inter ſe ſimilia : pariterque K R ſimile erit rectangulo K H : quare duo rectangula I P , & K R ſimilia ſunt duobus rectangulis G I , H K inter ſe ſimilibus ; & ideo illa inter ſe quoque ſimilia erunt , & habent latera homologa æqualia , illa nimirum , quæ opponuntur æqualibus abciſsis A L , & D N , igitur rectangula P I , & R K æqualia*



æqualia ſunt inter ſe: ſunt verò rectangula N K, & L I æqualia quoque (cum latera circa angulos rectos æqualia habeant, ſingula ſingulis) ergo duo rectangula A P, & D R æqualia ſunt inter ſe.

C Quia, ſi non cadit ſuper illum, eſſent ſectioni hyperbolicæ duo axes, & in ellipſi tres axes, &c. *Quoniam æquales ſectiones B A, E D ſibi mutuò congruunt, & vertices A, & D coincidunt, ſiquidem axis A L non cadit ſuper axim D N (cum ambo tamen axes ſint) haberet vnica ſectio, ſcilicet duæ ſectiones congruentes, duos axes A L, & D N conuenientes in eodem puncto verticis, quod in hyperbola eſt impoſſibile; in ellipſi verò, in qua ſemper duo axes reperiuntur ſe ſe ſecantes in centro ad angulos rectos, reperietur tertius axis, ille nimirum, qui ab eodem vertice A ducitur in eadem ſectione A B, & non coincidit cum axi A L.* 48. lib. 2.

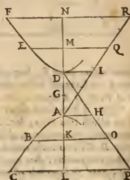


d Ideoque B L æqualis eſt N E, & poterunt A P, D R, applicata ad A L, D N æqualia &c. *Quia quadrata æqualium B L, E N æqualia ſunt rectangulis A P, D R; erunt illa æqualia; & eorum latera A L, D N facta ſunt æqualia; igitur reliqua duo latera L P, N R æqualia quoque ſunt. Simili modo oſtendetur, quod M Q æqualis eſt O S, ſeu L T æqualis eſt N V, & L M, ſeu T Q æqualis eſt N O, ſeu V S; erant autem prius L P, N R æquales; igitur reſiduæ P T, & R V æquales erunt, ſed quia T Q, & G L ſunt parallelæ pariterque V S, & H N; ergo vt T P ad P L ita eſt Q T ad L G, ſimili modo vt V R ad R N ita eſt S V ad N H; habent verò duæ æquales T P, & V R ad duas æquales P L, & R N eandem proportionem, igitur duæ æquales Q T, & S V eandem proportionem habent ad L G, & N H, & propterea hæ erunt æquales, & ablatis æqualibus A L, D N, erunt reliquæ A G, & D H inter ſe æquales, & habet G A ad A I eandem proportionẽ, quàm Q T ad T P, ſeu quàm S V ad V R; pariterq; H D ad D K eſt vt S V ad V R (propter parallelas & ſimilitudinẽ triangulorũ) igitur vt G A ad A I ita erit H D ad*

ad D K, & propterea etiam consequentes A I, & D K æquales sunt inter se, & comprahendunt angulos rectos A, & D; ergo figuræ G A I, & H D K similes sunt inter se, & æquales.

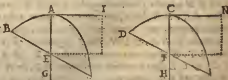
Notæ in Proposit. IV.

IAm ergo demonstratum est, quod duo vertices tympani sunt similes, & æquales, & inclinatus communis inter vtrumque verticem (16. ex 1.) ergo figura est communis, &c. *Hac propositio est veluti Corollarium primæ partis secundæ propositionis in qua ostensum est, quod si duæ hyperbolæ habuerint axium figuras æquales, & similes, erunt quoque sectiones ipsæ æquales, & congruentes; habent verò sectiones oppositæ A B, & D E (quæ vocantur Vertices Tympani ab Arabico interprete) figuras D A H, & A D I axis D A æquales, & similes (vt in 14. primi libri demonstrauit Apollonius); ergo sectiones oppositæ æquales erunt inter se, & congruentes.* a



Notæ in Proposit. X.

SImiliter constat, quod si potentes contineant cum suis abscissis angulos equales obliquos, iudicium est, quod memorauimus in sectionibus, &c. *Sensus huius propositionis talis est. In duabus sectionibus conicis, si cum earum diametris ordinatim applicatæ contineant angulos æquales, non rectos, & earum latera recta sint æqualia in parabolis, in reliquis verò sectionibus latera recta, & transuersa æqualia, itaut figuræ ipsæ æquales sint; erunt sectiones ipsæ inter se æquales: & è conuersò, si sectiones æquales fuerint, habebunt latera æqualia earum diametrorum, cum quibus ordinatim applicatæ angulos æquales, non rectos continent.* a

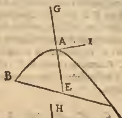


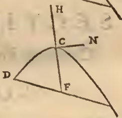
Demonstrationes non apponuntur ab Apollonio, quia ijsdem verbis omnino in eisdem figuris absolui possunt. Sint enim primo duæ parabolæ A B, & C D, atque earum diametri A G, & C H efficiant æquales angulos F, & E, cum ordinatim ductis D F, & B E, sintque latera recta A I, C N æqualia. Dico,

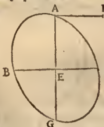
sectiones

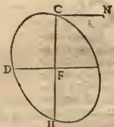
sectiones aquales esse. Sumatur quodlibet punctum B in sectione B A ducaturque ordinatim applicata B E, seceturque C F aqualis A E, & ducatur ordinatim D F. Manifestum est, rectangula E A I, & F C N aqualia esse (cum latera sint aqualia, singula singulis); his verò rectangulis aqualia sunt quadrata ordinatim applicatarum B E, D F; ergo & quadrata sunt aqualia, atque eorum latera B E, D F aqualia quoque. Si igitur parabola superponantur ita, vt punctum E super F, & diameter A E super C F cadat, necessario punctum A super C cadet (propter aqualitatem abscissarum) atque punctum B super punctū D incidet (propterea quod anguli E, & F aquales sunt, pariterque recta B E, & D F sunt aquales), & quia quodlibet punctum B parabola A B cadit semper super sectionem C D; ergo dua sectiones B A, & D C sibi mutuò congruunt, & ideo aquales sunt. Non secus conuersum huius propositionis demonstrari potest. 11.lib. 1.

Altera verò pars propositionis breuius demonstrabitur hac ratione. In duabus hyperbolis, aut ellipsibus efficiant ordinatim applicata B E, D F cum diametris A E, & C F angulos aquales, & non rectos; sintque transuersa latera G A, & H C aqualia, pariterque latera recta A I, & C N aqualia. Dico, sectiones B A, C D aquales esse. Sumatur quodlibet punctum B sectionis B A, ducaturque ad A E diametrum ordinatim applicata B E, seceturque C F aqualis abscissa A E, ducaturque F D ad H C F diametrū ordinatim applicata. Erit rectangulum G E A ad quadratum B E, vt latus transuersum G A ad rectum A I; pariterque rectangulum H F C ad quadratum F D erit, vt H C ad C N: habent verò dua aquales G A, & H C eandem proportionem ad duas aquales A I, & C N; igitur rectangulum G E A ad quadratum B E eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H F C ad quadratum D F, sunt verò rectangula G E A, H F C aqualia inter se (quandoquidem eorum latera A E, C F facta sunt aqualia) qua addita ipsis A G, & C H aqualibus efficiunt latera E G, & F H aqualia; ergo quadrata d. a um B E, & D F aqualia sunt inter se; & ideo ordinatim applicata B E, & D F aquales erunt. Quare facta, vt prius, intellectuali superpositione; nedum vertex A super C, sed etiam quodlibet punctum B sectionis A B super sectionem C D cadet; ideoque sectiones sibi mutuò congruent, & aquales erunt. 21.lib. 1.



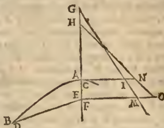






E conuerso, si sectiones B A, & C D aquales supponantur, sibi mutuò congruent,

gruent, & ideo à communi vertice A, ducta qualibet diametro A E, vel C F, ad quàm ordinatim applicetur qualibet B E, seu D F in angulo non recto; sintque latera transuersa, & recta G A, A I, atque H C, C N. Dico, huiusmodi latera, & figura seu rectãgula G A I, H C N æqualia, & similia esse inter se, & sibi mutuò congruentia. Si enim hoc verum non est, eorum diametri G I, & H N similiter positæ, & subtendentes communem angulum A non coincident; & ideo æquidistantes erunt aut se mutuò secabunt in vno puncto: ducatur ergo à termino E alicuius ordinatim applicatæ B E recta linea E M parallela lateribus rectis A I, C N, ita vt secet diametros figurarum supra aut infra occursum in duobus punctis M, & O. Igitur in sectione A B idem quadratum ordinatim applicatæ B E, seu D F æquale erit rectangulo A E M, & in sectione D C æquale erit rectangulo C F O, suntque abscissæ A E, & C F æquales; ergo M E, & O F æquales inter se sunt: pars, & totum quod est absurdum: Non ergo latera figurarum inæqualia sunt. Quod erat ostendendum.



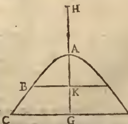
SECTIO SECVNDA

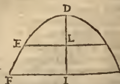
Continens Proposit. III. VI. VII. & IX.

PROPOSITIO III.

Conisectio non est æqualis sectioni quæ eiusdem generis cũ illa non sit.

Etenim ellipsis non erit æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ; quia illa est terminata, hæ verò sunt indeterminatæ. At parabola D E F, cuius axis D I non erit æqualis hyperbolæ A B C, cuius axis A G, & inclinatus A H. Quia si abscindantur A K, K G æquales D L, L I, & educamus ad axes perpendiculares B K, C G, E L, F I: Dico, quod sectio D F non est æqualis sectioni a





ſectioni A C; quia ſi eſſet æqualis illi, facta ſuperpoſitione, ſibi mutuò congruerent, & caderent puncta E, F, L, I, ſuper B, C, G, K, & eſſet F I æqualis C G, atque E L æqualis B K; ideoque quadratū F I ad quadratum E L eſſet, vt D I ad D L (19. ex 1.) eſſetque quadratum C G 20.lib. 1.
ad quadratum K B, vt A G ad K A, quod eſt abſurdum; quia illius proportio ad iſtam eſt, vt H G in G A ad H K in K A (20. ex 1.) Igitur 21.lib. 1.
ſectio parabolica non eſt æqualis ſectioni hyperbolæ, nec ſectio aliqua æqualis eſt ſectioni, quæ non ſit eiuſdem generis; Et hoc erat oſtendendum.

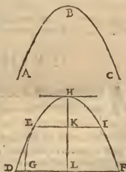
PROPOSITIO VI.

a QVælibet duæ ſectiones A B C, & D H F, quarum portio vnius ſuperpoſita portioni alterius congruit, ſunt æquales inter ſe.

Alioquin congruat portio B C portioni E F, at non cadat portio A B ſuper D E, ſed cadat in ſitu E G, & educamus lineam tangentem duas ſectiones in H, & educamus E I, D G F parallelas tangenti; & ex H ad ſemipartitionem ipſius E I ducatur H K, quæ occurrat D F in L. Et quia H L ſecat bifariam lineam parallelam tangenti ab eius termino ductæ; ergo eſt diameter vniuerſæ ſectionis (5. ex 2.) quare bifariam ſecat vnamquanque ex D F, G F, & fiet D L æqualis G L, quod eſt abſurdum: igitur ſectio A B C tota congruit ſectioni D H F. Quod erat oſtendendum.

34.lib. 1.

7.lib. 2.

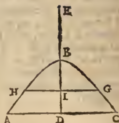


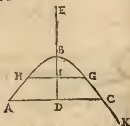
PROPOSITIO VII.

a DVæ ordinationes axis in qualibet coni ſectione abſcindunt à ſectione ex vtraque parte axis duas portiones, quarum ſi vna alteri ſuperponatur ſibi mutuò congruent, nec congruunt alicui aliæ portioni ſectionis.

Sit coniſectio A B C, & eius axis B D, & ſumantur in ſectione puncta G, C, ab eis educãtur duæ ordinationes G H, C A occurrentes axi in I, D. Dico, quod B G congruit B H, & G C ipſi H A, & ſuperficies B D C ſuperficiei B D A, & ſegmentum B G C ſegmento B H A. Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C in I, D, vtique G I ipſi I H congruet, & D C ipſi D A, & duo puncta G, C ſuper duobus punctis H, A cadent, & portio ſectionis conicæ G C ſuper portionem H A, & G B ſuper H B: Et dico, quod portio H A non congruit alicui alteri portioni, quàm G C: ſi enim poſſibile eſt cõgruat portioni C K, & portio H B congruet portioni, quæ continuatur ipſi K C; ergo cadet B ex H B non ſuper B ex C G B; quia portio H B non eſt æqualis portioni C B; & propterea incidet axis B D in alium locum, eſſentque eidem ſectioni plures axes: quod eſt abſurdum; 48.lib. 2. (51. 52. ex 2.) igitur non cadit H A niſi ſuper C G. Vt fuerat propoſitum.

b





PROPOSITIO IX.

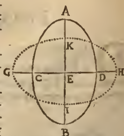
Manifeſtum eſt ex demoſtratis, quod portiones ſectionum æqualium non congruunt ſibi inuicem, niſi earum diſtantiæ à verticibus ſint æquales. a

Oſtenſum enim eſt ſibi non congruere, quarum diſtantiæ à verticibus non ſunt æquales, quia portio H A, ſi caderet ſuper portionem C K, & earum diſtantiæ à B non eſſent æquales, conſequitur, quod in hyperbola 48.lib. 2. ſint duo axes, & in ellipſi tres axes: quod eſt abſurdum (51. 52. 53. ex 2.)

Si autem in ellipſi cadit axis A E tranſuerſus ſuper axim rectum illius, vtique differunt inter ſe, & non ſibi inuicem congruunt ſectiones. b

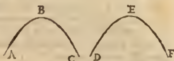
Conſtat etiam, quod in ſectionibus inæqualibus, vt A B C, D E F portio vnius earum non congruit portioni alterius.

Alioqui congruet B A ipſi D E, & congrueret etiam E F ipſi B C (6. ex 6.) eſſetque ſectio C B A æqualis ſectioni F E D: at ſuppoſuimus, non eſſe æquales, quod eſt abſurdum:



Ergo

ergo non congruit portio alicuius sectionis portioni alterius sectionis, cui æqualis non est. Et hoc erat ostendendum.

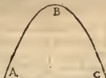


Notæ in Proposit. III.

a Etenim ellipsis non est æqualis alicui hyperbolæ, &c. *Suppleri debet in textu verbum* (parabolæ) *dicendo. Etenim ellipsis non est æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ, quia illa est determinata; hæ verò sunt indeterminatæ, scilicet ellipsis est finita parabole verò, & hyperbole in infinitum extendi possunt, & propterea nulla ratione æquales ostendentur.*

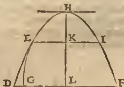
Notæ in Proposit. VI.

a Quælibet duæ sectiones A B C, D E F, quarum vnaquæque literarum superposita literis alterius congruit; vtique sunt æquales, &c. *Legendum puto. Quælibet duæ sectiones A B C, & D E F, quarum portio vnius, alterius portioni superposita congruit sunt æquales inter se.*



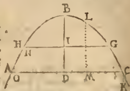
Notæ in Proposit. VII.

a Ordinationes axis in qualibet hyperbolarum abscindunt à sectione ex vtraque parte axis duo segmenta, quæ, si cadit vnum super alterum, sibi mutuò congruunt, nec excedunt, nec deficiunt, nec congruunt alicui portioni sectionis, &c. *Expungi debent verba aliqua huius textus superuacanea, & aliqua adiungi, vt sensus continuus talis sit. Duæ ordinationes axis in qualibet conisectione abscindunt à sectione ex vtraque parte, axis duas portiones, quarum vna alteri superposita sibi mutuò congruent, nec cōgruunt alicui alia portioni sectionis.*



b Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C, &c. *Ex eo enim quod omnes applicata ad axim B D secantur bifariam ab illo,*

illo, & ad angulos rectos, si intelligatur superficies B I G, superposita superficiei B I H, itaut axis super axim cadat, atque vertex B sit communis necessario punctum I commune erit, atque recta I G cadet super I H, cum anguli G I B, & H I B recti sint, atque punctum G cadet in H, propter æqualitatem duarum ordinatim applicatarum I G, I H: eadem ratione qualibet alia puncta sectionis G B inter G, & B sumpta cadent super B H; & ideo portio sectionis conicæ G B congruet portioni B H, & eidem æqualis erit. Simili modo constat, portionem G C æqualem esse portioni H A, & sic superficies ipsæ. Quod verò portio H A non congruat alicui alteri segmento C K præter G C, constat ex eo, quod si portiones K C, & A H sibi mutuò congruunt, vt nimirum punctum C super H, & punctum K super A cadat: & concipiatur punctũ C idem ac N, & K idem ac O, & portio O N L æqualis immo eadem sectio K C B, & illius axis L M omnino idem ac axis B D; tunc quidem (ex precedenti prop. 6.) sectiones ipsæ A B, & K B, seu O L æquales erunt, & sibi mutuò congruentes: & propterea H B cadet super portionem maiorem C B seu ei æqualem N B L (cum H B æqualis ostensa sit ipsi G B) & ideo vertices B, & L duarum axium B D, & L M in duabus sectionibus A B, & K B seu O N L inæqualibus non conuenient: quapropter in duabus congruentibus, seu in eadem sectione duo axes B D, & L M existent, quod est absurdum, quia est contra propos. 48. libri 2.



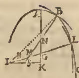
Notæ in Proposit. IX.

a MAnifestum est ex demonstratis, quod portiones sectionum æqualium non congruunt, &c. *Sicuti in propos. 7. dictum est, quod duæ portiones non æqualiter à vertice axis distantes sibi mutuò congruere nõ possunt, ita hic in duabus quibuslibet æqualibus conisectionibus idem verificari ostenditur, quod nimirum duæ portiones cuiuslibet sectionis conicæ, vel duarum æqualium sectionum inæqualiter à vertice axis distantes non sint congruentes. Hoc autem alia ratione demonstrare superuacaneum non erit, cum demonstratio, quæ in textu Arabico corrupto affertur non omnino sufficiens videatur, sed prius ostendendum est.*

LEMMA I.

IN duabus æqualibus conisectionibus A B C, & D E F, quarum axes A G, D H describere duos circulos æquales contingentes conicas sectiones, quorum is, qui propinquior est vertici extrinsecus, reliquus verò intrinsecus sectionem tangat.

In

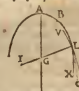


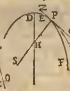


In sectione A B C ducatur ramus breuisecans singularis I L secans axem in G, sitque I punctum concursus perpendicularis I K, & breuisecantis; & à quolibet puncto B inter L, & verticem A ducatur alius ramus breuisecans B M, qui occurret L I vltra axim in M, & inter puncta G, & I; coniungaturque recta linea B I. Quoniam angulus L G A acutus est, erit angulus G M N internus, & oppositus in triangulo G M N minor illo, & ideo acutus, & propterea qui deinceps est angulus B M I erit obtusus, & ideo in triangulo I B M latus I B subtendens maximum angulum obtusum maius erit latera B M; sed ramus I L maior est, quàm I B, propterea quod remotior est à vertice A, igitur ramus I L maior erit, quàm B M: Secari ergo poterunt aquales rectæ lineæ L R, B S, quæ sint minores quidè, quàm I L, sed maiores, quàm M B; & describantur duo circuli, quorum radij sint S B, & R L æquales, atque centra sint S, & R; Manifestum est circulum, cuius radius B S contingere conisectionem A C in puncto B, & extrinsecùs incedere, propterea quod radius B S maior est maximo breuisecantium M B à concursu M educto; è contra circulus radio R L descriptus intrinsecùs continget eandem conisectionem in L cum ramus M L minor sit singulari breuisecante L I. Tandè in sectione D E F secetur axis abscissa D H æqualis A N, & in angulo D H P æquali angulo A N B ducatur radius Y H P, qui fiat æqualis S B, & cètro Y radio verò Y P circulus describatur. Et quia in sectionibus æqualibus abscissæ, breuisecantes, anguli ab eis contenti, & circuli descripti sunt æquales, & congruentes; igitur circulus radio Y P descriptus, contingit conisectionem D E F extrinsecùs; sicuti circulus radij S B tangebat sectionem A B C in B extrinsecùs. Vt erat propositum. 51. 52. 53. lib. 5. 28. lib. 5. 8. Addit. lib. 5. 13. 14. 15. lib. 5. 67. lib. 5. Ex 12. Addit. lib. 5. 8. Addit. lib. 5. Ibidem.

Hoc demonstrat o ostendetur, quod in duabus conisectionibus A B C, D E F æqualibus, quarum axes A G, D H duæ portiones B C, & E F non æquè ab axium verticibus remotæ non erunt sibi congruentes. PROP. 1. Addit.

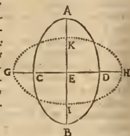
Si enim possibile est B C, & E F sibi mutuò congruant, & sumatur intermedium punctum commune, vel duo puncta coincidentia L, & P, & quia portiones B C, E F inæqualiter distant à verticibus, ergo puncta coincidentia L, P non erunt æquè à verticibus remota; sit ergo P propinquius vertici D, quàm est L vertici A, & per L, & P ducantur rectæ lineæ L O, P Q tangentes sectiones, & ex lèmate præcedenti describantur duo circuli æquales Z P T, & V L X radijs I L & S P, quorum Z T extrinsecus tangat sectionè in P, & V X intrinsecus in L, cumque eorum radij I L, S P sint breuisecantes, erunt perpendiculares ad L O, P Q contingentes sectionem in L, & P; atque portiones B C, E F sibi mutuò congruunt, idest constituunt vnicam communem peripheriam, ergo rectæ lineæ L O, P Q contingentes eandem sectionem sibi mutuò congruent, pariterque breuisecantes æquales L I, P M ad illas perpendiculariter insistentes erunt congruentes quoque; & propterea circuli V X, Z T ab ijs radijs geniti erunt quoque congruentes, 33. 34. lib. 1. 29. 30. lib. 5. 35. 36. lib. 1.





entes; ideoque si vnus eorum, nempe Z T extrinsecùs tangit communem portionem conicam B C, reliquus V X extrinsecùs quoque eam tanget, sed ex constructione intrinsecùs sectionem tangebat, quod est absurdum: Non ergo duæ portiones B C, & E F non aquè à verticibus axium remota sibi mutuo congruent. Quod erat ostendendum.

Si autem cadit in ellipsi axis A C transuersus super axim rectum illius; vtique excedit illam, & non sibi mutuò congruunt sectiones, & quædam congruunt, &c. *Sensus est. Si intelligantur duæ ellipses, habentes axes transuersos A B, & G H æquales inter se, pariterque axes rectos C D, I K æquales: & axis A B transuersus vnius ponatur super I K axim rectum alterius, ita vt centra sibi mutuò congruant in E: tunc quidem, quia axes in ellipsi inæquales sunt (alias esset circulus) igitur extremitates axis transuersi A B non cadunt super extremitates axis recti K I, neque G, H cadunt super C, D; & ideo circumferentia ellipsium se se mutuò secant quatuor in locis, vt in libro 4. ostensum est.* b

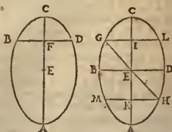


SECTIO TERTIA

Continens Proposit. V. & VIII.

PROPOSITIO V.

SI per centrum E ellipsis A B, C D transeat linea recta A C vsque ad sectionem; vtique bifariam diuidit superficiem sectionis, & circumferentiam illius, scilicet erit superficies A B C æqualis superficiei A D C.



Nam si A C fuerit axis sectionis, vtique circumferentia A B C congruet A D C, nam si non cōgruit signemus locum B, quod alteri sectioni nō coincidat, & producamus ex illo perpendicularem B F super A C vsque ad D. Ergo B D ordinata est ad C A, & propterea B F superposita cōgruet ipsi D F, & cadet B super D, quia B F æqualis est D F (8. ex 1.); sed non cadebat super illum; quod est absurdum. Igitur circumferentia

rentia A B C æqualis eſt circumferentiæ A D C, & ſuperficies illius æqualis ſuperficiei.

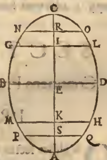
Iam linea G H tranſiens per centrum ellipſis non ſit axis. Ducamus ex G, H ſuper axim C A duas perpendiculares G I, H K, quæ pertingant ad L, M. Et quia ſi ponatur A D C ſuper A B C, congruit G I ſuper L I (7. ex 6.) & cadet G ſuper L, quia G I æqualis eſt I L, & cadit circumferentia C G ſuper circumferentiam C L; ergo ſuperficies C I G æqualis eſt ſuperficiei C I L: & quia B C D congruit B A D, & ſuperficies ſuperficiei, cadet C I ſuper A K, & L I ſuper K H, & circumferentia C L ſuper circumferentiam A H (quia E I æqualis eſt E K) & ſuperficies C I L congruit ſuperficiei A K H; & propterea ſuperficies A K H æqualis eſt G I C, & triangulum E G I æquale eſt triangulo E K H; igitur ſuperficies A E H æqualis eſt ſuperficiei G E C, & circumferentia A H æqualis eſt circumferentiæ G C, eritque circumferentia C D H, & ſuperficies eius æqualis A B G, & ſuperficiei illius. Quare G H tranſiens per centrum ſectionis A B C D bifariam eam diuidit. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO VIII.

Similiter conſtat, quod ſi ex quolibet quadrante ellipſis ſecentur circumferentiæ, per quarum extremitates rectæ lineæ coniunctæ ſint ad eundem axim ordinatim applicatæ, & æquè à centro remotæ; vtique ſunt congruentes, & æquales, nec alicui portioni eiuſdem ſectionis vna illarum æqualis eſt.

a Nam demonſtrauimus, quod duæ ſuperficies G I C, L I C ſibi congruunt, nec non congruunt, duabus ſuperficiebus H A K, M A K (5. ex 6.); & ſi eduxerimus duas ordinationes N O, P Q, quarum diſtantiæ à centro ſint æquales, ſimili modo oſtendetur, quod ſuperficies N R C, O R C, A S Q, A S P ſint congruentes (5. ex 6.) & quod circumferentiæ N C, C O, A Q, A P ſint congruentes, remanebunt quatuor ſegmenta G N, L O, H Q, M P congruentia, & ſuperficies quoque eorum congruentes. Et inſuper dico, quod quodlibet horum

b ſegmentorum non congruit alicui alio ſegmento; nam ſequeretur, quod in eadem ellipſi ſint tres axes, vti dictum eſt. Quare patet propoſitum. 48. lib. 2.

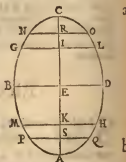


Notæ in Propoſit. V.

ATque B C D congruit B A D, & ſuperficies ſuperficiei, &c. *Quoniam in ſecunda figura B D eſt axis ellipſis per centrum E ductus; ergò vt in prima parte huius propoſitionis dictum eſt, ſibi mutuò congruent ſemiellipſes B C D, & B A D.* a

Notæ in Propoſit. VIII.

NAm demonſtrauimus, &c. *Expoſitio huius propoſitionis hæc erit. Sit ellipſis A B C D,* a *cuius axes C A, & B D, & in quolibet eius quadrante ſignentur tales circumferentiæ N G, O L, H Q, M P, vt coniuncta recta linea O N, G L, H M, Q P ſint ad axim A C ordinatim applicatæ ſecantes eum in R, I, K, S; ſintque binarum extremarum N O, P Q à centro E diſtantia æquales E R, E S, & binarum intermediarum L G, H M æquales à centro diſtantia E I, E K oſtendendum eſt ſegmenta G N, L O, H Q, M P æqualia eſſe.*



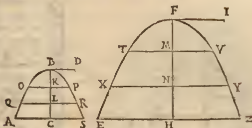
Et inſuper dico, quod quodlibet horum ſegmentorum non congruet alicui alio ſegmento, b &c. *Si enim in eodem, vel in duabus ellipſis quadrantibus ſumantur ſegmenta G N, & M P non æque ab axis vertice B vel à verticibus A, C einſdem axis remota, non erunt congruentia, vt deducitur ex propoſ. 1. additarum huius.*

SECTIO QVARTA

Continens Propoſit. XI. XII. XIII. & XIV.

PROPOSITIO XI.

QVælibet ſectio parabolica, vt A B, cuius axis B C, & erectum B D ſimilis eſt cuilibet ſectioni parabolicæ, vt E F, cuius axis F H, & erectum F I.



Ponamus itaque C B ad B D, vt H F ad F I, & diuidantur tam B C, quàm F H in punctis K, L, M, N in eisdem rationibus, & educamus super eas ordinationes O P., Q R, A S, T V, X Y, E Z. Quia B C ad B D est vt H F ad F I, & A C est media proportionalis inter C B, B D (12. ex 1.) pariterque E H inter H F, F I (12. ex 1.) igitur A C ad C B est, vt E H ad H F, & A S dupla ipsius A C ad C B est, vt E Z ad H F; cumque B C ad B L posita sit, vt H F ad F N, erit B D ad B L, vt I F ad F N; igitur Q R ad L B est vt X Y ad N F; atque sic ostendetur, quod O P ad K B est, vt T V ad M F, quare proportio ordinationum axis vnius sectionum ad sua abscissa est, vt proportio ordinationum alterius ad sua abscissa, & proportiones abscissarum vnius sectionis ad abscissa alterius sectionis eædem sunt. Quare sectio A B similis est sectioni E F. Quod erat ostendendum.

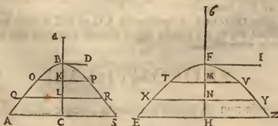
Ex 11. lib. 1.

a

Defin. 2. huius.

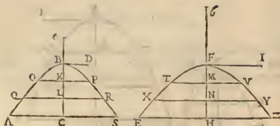
PROPOSITIO XII.

SI duarum hyperbolarum, aut ellipsium duæ axium figuræ fuerint similes, vtique sectiones similes erunt: Si verò fuerint sectiones similes, figuræ etiam similes erunt.



a Sint sectiones A B, E F, earum axes inclinati, vel transuersi B a, F b,
b & erecti earum B D, F I, & maneant signa, ordinationes, & proportiones eædem, quæ in præcedenti propositione. Quoniam figura sectionis

V 2 A B



A B ſimilis eſt figuræ ſectionis E F, erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B; & *b* H in H F ad quadratum H F, vt *a* C in C B ad quadratum C B (nam poſuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*) ergo ex æqualitate, quadratũ E H ad quadratũ H F eſt, vt quadratum A C ad quadratum C B: & propterea E Z ad H F eſt vt A S ad C B; Atque ſic oſtendetur, quod X Y ad N F ſit vt Q R ad L B, & T V ad M F ſit vt O P ad K B; ergo proportiones ordinationum axis vnius earum ad ſua abſciſſa ſunt eædem rationibus aliarum ordinationum axis ad ſua abſciſſa, & alternatiuè. Quare duæ ſectiones ſunt ſimiles.

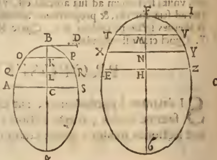
Defin. 2. huius.

E contra oſtendetur, quod ſi duæ ſectiones fuerint ſimiles, earũ figuræ ſimiles quoque erunt. Quia eſt A C ad C B, vt E H ad H F, & eandem proportionem habent earum quadrata, atque quadratum H F ad H F in H *b* eſt, vt quadratum C B ad C B in C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit, vt C B ad B *a*); ergo ex æqualitate quadratum E H ad *b* H in H F, nempe I F ad F *b* (20. ex 1.) eſt, vt quadratum A C ad *a* C in C B, nempe vt D B ad B *a* (20. ex 1.); quare figuræ duarum ſectionum ſunt ſimiles. Et hoc erat oſtendendum.

Ex def. 2. huius.

21. lib. 1.

Ibidem.

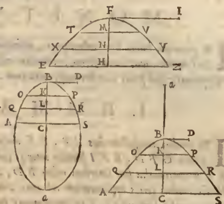


PROPOSITIO XIII.

PArabola non eſt ſimilis hyperbolæ, neque ellipſi.

Hyperbolæ, ſeu ellipſis A B ſit axis B C, & inclinatus, ſeu tranſuerſus B *a*, & E F ſit ſectio parabolæ, cuius axis F H. Dico, quod ſectio E F non eſt ſimilis ſectioni A B hyperbolicæ, aut ellipticæ, alioquin ſit ſimilis ali- a

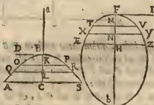
b lis alicui earum (si possibile est) ergo possumus educere in singulis sectionibus potentes, quæ habeant ad sua abscissa axium easdē proportiones, & abscissæ inter se sint proportionales; sintque illæ V M, Y N, P K, R L. Quia Y N ad N F posita fuit, vt R L ad L B, & N F ad F M, vt L B ad B K, & F M ad M V, vt B K ad K P; ergo Y N ad M V in potentia, nempe N F ad M F (cum sectio sit parabola 19. ex 1.) nempe L B ad B K ex contructione erit, vt R L ad K P potentia, quæ eandem proportionem habent, quàm a L in L B ad a K in K B; quia sectio est hyperbolæ, aut ellipsis (20. ex 1.) quare a L in L B ad a K in K B est, vt L B ad B K; quare a L est æqualis a K: quod est absurdum. Igitur parabole non est similis vlli reliquarum sectionum. Et hoc erat probandum. 20. lib. 1. 21. lib. 1.



PROPOSITIO XIV.

ET sic ostendetur, quod hyperbolæ non est similis ellipsi.

a Alioquin sequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, nempe a L in L B ad a K in K B in hyperbola est, vt quadratum Y N ad quadratum M V, seu vt b N in N F ad b M in M F in ellipsi. His positis: quia L B ad B K posita fuit, vt N F ad M F; ergo a L ad a K eandem proportionem habet, quàm b N ad b M: & hoc est absurdum. Quare sectio A B non est similis E F; vt fuerat propositum. 21. lib. 1.



MONI-

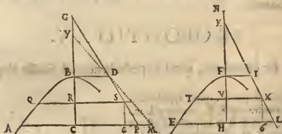
MONITVM.

IN principio huius libri monuimus, definitionem similium conicarum sectionum, quæ circumfertur, vitiosam esse; quod hic ostendendum suscepimus: sed prius hæc demonstranda sunt.

LEMMA II.

IN duabus conisectionibus A B, E F eiusdem nominis sint axium figuræ G B D, K F I similes inter se, idest transuersa latera G B, K F proportionalia sint lateribus rectis B D, F I: duci debent in singulis sectionibus series applicatarum ad axes, ita vt axium abscissæ (quæ proportionales sunt inter se) ad conterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus.

Sumantur duæ abscissæ B C, F H, quarum C B ad B D habeat maiorem proportionem, quàm habet H F ad F I, & C B, H F secentur proportionaliter in R, V, & per ea puncta ducantur ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportio-



21. lib. 5. *nem habet, quàm latus rectum D B ad transuersum G B, pariterq; quadratum E H ad rectangulum K H F est vt I F ad F K; atq; D B ad B G ex hypothesi, est vt I F ad F K; ergo quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet quàm quadratum E H ad rectangulum K H F; & quia G B ad B D est vt K F ad F I, & D B ad B C minorem proportionẽ habet quàm I F ad F H, ergo ex æquali G B ad B C, minorem proportionem habet quàm K F ad F H, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi G C ad C B seu rectangulum G C B ad quadratum B C minorem proportionẽ habebit quàm K H ad H F, seu quàm rectangulum K H F ad quadratum F H: erat autem quadratum A C ad rectangulum G C B vt quadratum E H ad rectangulum K H F; igitur ex æquali, quadratum A C, ad quadratum C B minorem proportionem habet quàm quadratum E H ad quadratum H F, & ideo A C ad C B*

minorem

minorem proportionem habebit, quàm E H ad H F. Postea quia C B ad B R erat vt H F ad F V, & prius G B ad B C minorẽ proportionem habebat, quàm K F ad F H, ergo ex aquali G B ad B R minorem proportionem habet, quàm K F ad F V, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi G R ad R B, seu rectangulum G R B ad quadratum B R minorem proportionem habet, quàm K V ad V F, seu rectangulum K V F ad quadratum V F; sed propter similitudinem figurarum, vt prius quadratum Q R ad rectangulum G R B est vt quadratũ T V ad rectangulum K V F; ergo ex aquali quadratum Q R ad quadratum R B minorem proportionem habet, quàm quadratum T V ad quadratum V F, & Q R ad R B minorem proportionem habebit, quàm T V ad V F. Et sic reliqua omnes abscissa: quapropter patet propositum.

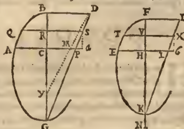
COROLLARIVM.

Hinc constat in duabus similibus conisectionibus duci posse duas series applicatarum ad axes, itaut abscissæ axium, quæ inter se proportionales sunt, ad suas potentiales nonsint in ijsdem rationibus. Quandoquidẽ ex prima parte propositionis 12. quotiescunque axium figuræ similes sunt etiam sectiones ipsæ sunt similes.

LEMMA III.

IN ijsdem figuris habeat G B ad B D maiorem proportionem, quàm K F ad F I duci debent duæ ordinatim ad axes applicatæ, quæ ad conterminas abscissas eandem proportionem habeant.

Ducatur qualibet ordinata E H, producanturq; vt secet coniunctam K I in L, & vt D B ad B G ita fiat L H ad H N, atq; fiat G C ad B C, vt N H ad H F, ducaturque ordinata A C; qua producta secet coniunctam G D in P. Dico A C, & E H esse quæsitas. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet, quàm D B ad B G, seu L H ad H N, & rectãgulum G C B ad quadratum B C est vt G C ad C B, seu vt N H ad H F, ergo ex aqualitate quadratum A C ad quadratum C B est vt L H ad H F, seu vt rectangulum L H F ad quadratum H F; vel potius vt quadratum E H ad quadratum H F; ideoque A C ad C B erit vt E H ad H F. Quod erat propositum. 21. lib. 1.

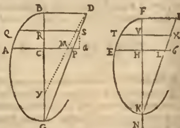


12. 13. lib. 1.

LEMMA IV.

L E M M A IV.

SI G B ad B D maiorem proportionem habuerit, quàm K F ad F I: Dico in singulis sectionibus reperiri non posse binas axium abscissas inter se proportionales, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus.



Si enim fieri potest, sit A C ad C B, vt E H ad H F, & Q R ad R B sit, vt T V ad V F, atque C B ad B R sit vt H F ad F V; coniungantur rectæ G D, K I quæ secēt ordinatas in S, P, X, L; & secentur C a æqualis R S, & H b æqualis V X, suntq; æquidistantes; ergo coniungentes S a, R C æquales sunt, & parallelæ, & sic etiam coniungentes X b, & V H, quare quadratum A C, seu rectangulum P C B ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H, seu rectangu-
12. 13. dratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H, seu rectangu-
lib. 1. lum L H F ad quadratum H F; ideoque P C ad C B eandem proportionem habet, quàm L H ad H F; est verò C B ad B R, vt H F ad F V, & per conuersionem rationis C B ad C R est vt H F ad H V, ergo ex æquali C P ad C R est vt L H ad H V: Eodem modo ostendetur, quod S R, seu a C ad R C est, vt X V, seu b H ad V H; erat autem P C ad C R vt L H ad H V; ergo a P differentia ipsarum S R, P C ad G R, seu ad S a est vt b L differentia ipsarum X V, L H ad H V, seu ad X b; estque D B ad B G vt P a ad S a (propter parallelas a S, C G, & parallelas a P, & B D) pariterque I F ad F K est vt L b ad b X, ergo D B ad B G eandem proportionem habet, quàm I F ad F K; quod est contra hypothesim, non ergo bina axium abscissæ inter se proportionales reperiri possunt in sectionibus A B, & E F, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HInc constat in duabus sectionibus eiusdem nominis si axium figuræ G B D, & K F I non fuerint similes, neque sectiones A B, & E F, similes esse. Nam est impossibile, vt omnes, idest infinitæ axium abscissæ inter se proportionales ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus, cum neque binæ in singulis reperiri possint ex hac propositione.

LEMMA V.

LEMMA V.

IN eiſdem figuris rurſus G B ad B D maiorem proportionem habeat, quàm K F ad F I: Dico quod minimè reperiri poſſunt axium abſciſſæ erectis proportionales, quæ habeant eandem rationem ad conterminas potentiales.

Secentur qualibet abſciſſa, B C, F H ita vt C B ad B D ſit vt H F ad F I, & ducantur ordinatim ad axes applicata A C, E H, qua producta ſecent, coniunctas G D, K I in P, L, atque fiat Y B ad B D vt K F ad F I, iungaturque Y D ſecans A P in M. Manifeſtum eſt rectam C M inaqualem eſſe C P, (propterea quod Y B minor eſt, quàm G B, cum ad eandem B D minorem proportionem habeat, quàm G B, ideoque punctum Y, & recta Y D cadent intra triangulum G B D, & punctum M intra ipſum cadet, aut extra G D productam). Quoniam D B ad B Y eſt vt I F ad F K, & erat C B ad B D vt H F ad F I; ergo ex aquali C B ad B Y erit vt H F ad F K, & comparando terminorum ſummas in hyperbola, & differentias in ellipſi ad antecedentes, Y C ad C B erit vt K H ad H F; eſt verò M C ad C Y vt L H ad H K (eo quod triãgula M C Y, & L H K ſimilia ſunt triangulis ſimilibus B D Y, I F K,) ergo ex aquali M C ad C B erit vt L H ad H F, & rectangulum M C B ad quadratum C B eandem proportionem habebit, quàm rectangulum L H F ad quadratũ H F; ſed rectangulũ M C B aquale nõ eſt rectangulo P C B (cum M C oſtenſa ſit inaqualis P C); ergo rectangulum P C B, ſeu quadratum A C ad quadratum C B non eandem proportionem habet, quàm rectangulum L H F, ſeu quadratum E H ad quadratum H F; & propterea A C ad C B non eandem proportionem habebit quàm E H ad H F. Idem oſtendetur in reliquis omnibus abſciſſis ſimiliter poſitis. Quare patet propoſitum. 12. 13 lib. 1.

COROLLARIVM I.

MAnifeſtum eſt in coniſectionibus non ſimilibus duci poſſe duas ſeries applicatarum ad axes, itaut abſciſſa ſimiles, ſeu proportionales inter ſe ad cõterminas potentiales non ſint in ijſdem rationibus.

COROLLARIVM II.

COlligitur pariter conuertendo, quod in duabus ſectionibus eiuſdem nominis ſi dua ſeries abſciſſarum ſimilium in axibus poſita fuerint, & in vna ſerie abſciſſa ad conterminas potentiales maiorem proportionem habeant, quàm in altera ſerie, fieri poteſt vt figura axium non ſint inter ſe ſimiles: Quod verificatur ſaltem in caſu pracedentis propoſitionis.

His præmiſſis, quoniam paſſio in definitione poſita eſſentialiter conuenit definito eſt impoſſibile, vt eidem ſubiecto definito competant dua paſſiones diuerſa, & inter ſe oppoſita, exempli gratia, fieri non poteſt, vt in triangulis ſimilibus ali-

quando anguli vnius inæquales sint angulis alterius, aut aliquando latera circa angulos æquales non sint proportionalia; ita in definitione Mydorgiana, quia conisectiones dicuntur similes in quibus omnes axium abscissæ, quæ proportionales sunt inter se in ijsdem sunt rationibus ad conterminas potentiales, igitur eidem subiecto definito, idest in duabus sectionibus conicis similibus, est impossibile, vt reperiatur series aliqua infinitarum similium abscissarum in axibus, quæ ad conterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus, & siquidem duæ passiones oppositæ eidem subiecto definito conueniant nulla earum erit eius passio essentialis, & ideo definitio bona non erit: vt exempli gratia quia in duobus similibus circulorum segmentis duo triangula inscripta possunt esse æquiangula, & etiam non æquiangula; ergo similitudo inscriptorum triangulorum non est passio essentialis segmentorum circularium similium inter se, & ideo non erit hæc bona definitio: Similia circulorũ segmenta sunt in quibus describi possunt duo triangula similia, *& ratio est, quia per definitionem nedum natura rei declaratur, & indicatur, sed etiam distinguitur, & diuersificatur à qualibet alia; & quoniam in* Coroll. Lem 2. huius. *sectionibus similibus reperiuntur duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales non sunt in ijsdem rationibus; & è contra ex definitione Mydorgij duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales sunt in ijsdem rationibus, essentialiter conueniunt definito; igitur hæ duæ oppositæ passiones conueniunt eidem subiecto definito, scilicet sectionibus similibus iuxta Mydorgij sententiam: quapropter tradita definitio sectionum similium vitiosa erit, & manca.*

Vt autem hoc clarius pateat exponantur duæ sectiones A B, E F eiusdem nominis, quarum axes B C, F H, & propositum primò sit demonstrare sectiones illas esse similes inter se; ergo ostendendum est passionem definitionis traditæ conuenire sectionibus A B, E F; quod nimirum similes axium abscissæ in ijsdem rationibus debent esse ad cõterminas potentiales, & quia in definitione nulla cautio, vel determinatio adhibetur, igitur sumi possunt quælibet axium abscissæ B C, F H, & hæ secari proportionaliter in R, V, & à punctis diuisionum duci possunt ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V; & supponamus demonstratum esse, quod B C ad C A sit vt F H ad H E, pariterque vt B R ad R Q sit vt F V ad V T, tunc quidem ex vi definitionis deducitur, quod similes sint sectiones A B, & E F. At quia demonstrari potest ex Lem. 2. huius. *in ijsdem sectionibus (sumendo abscissas B C, F H ad libitum, & proportionaliter diuidendo eas in R, & V) quod B C ad C A habet maiorem proportionem, quàm F H ad H E; pariterque B R ad R Q maiorem proportionẽ habeat, quàm* Coroll. 2. Lem. 5. huius. *F V ad V T, & sic semper; ergo non poterit deduci similitudo potius quàm non similitudo; ideoque definitio similium sectionum erit vitiosa, quandoquidem ex ea duæ contradictoria deducuntur.*

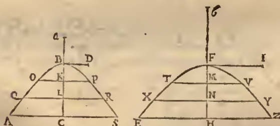
Secundo loco supponantur duæ sectiones A B, & E F similes inter se, & propositum, sit demonstrare quod axium figura, seu rectangula G B D, & K F I

sint

sint similia, quæ quidem, est propositio 3. libri 4. Mydorgij, eiusque præparatio, seu constructio talis est (, & appono eius verba immutatis tantummodo literis figurarũ) sint à sectione A B ordinatim ad axim B C applicatæ binæ quæquæ A C, Q R, & vt C B ad B R ita sit, H F ad F V, ordinatimque à sectione E F applicentur E H, T V *(subsequitur postea demonstratio sic.)* Quoniam igitur similes ponuntur sectiones A B, E F, & sunt H F, F V portiones portionibus C B, B R similes, *(idest proportionales)* vt B C ad C A, ita erit F H ad H E, & vt B R ad R Q, ita erit F V ad V T, &c.

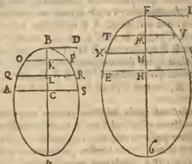
Huiusmodi verba subtiliori trutina expendenda sunt. In præparatione, seu constructione assumit abscissas B C, & F H, absque vlla lege, aut determinatione; ergo sumi possunt cuiuscunq; longitudinis: quare fieri potest vt C B ad latus rectum B D non habeat eandem proportionem quàm habet F H ad F I, & tunc licet C B, H F diuidantur proportionaliter, & ducantur potentiales, &c. A C ad C B habebit maiorem, aut minorem proportionem quàm E H ad H F, & pariter Q R ad R B non habebit eandem rationem, quàm T V ad V F, & sic vlterius in tota serie; sed ex hoc sequitur, quod possint esse figuræ axium inter se non similes; Mydorgius autem similes esse concludit; igitur ex eadem hypothesi, & ex eadem definitione deducitur, quod sectiones similes habent figuras axium similes inter se, & non similes, quod est impossibile; non igitur definitio à Mydorgio tradita legitima, & perfecta est: quod fuerat ostendendum. Lem. 2. huius. Coroll. 2. Lem. 5. huius.

Quod vero definitio à me reformata tribui possit Apollonio conijcitur præcipuè ex demonstratione secundæ partis propor. 12. ibi enim ex hac suppositione, quod

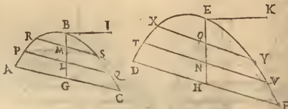


scilicet duæ sectiones A B, & E F sint similes deducit earum figuras similes esse. Ait enim: quia est A C ad C B vt E H ad H F, & eandem proportionẽ habent earum quadrata, atque quadratum H F ad rectangulum: F H *b* eandem proportionem habet quàm quadratum C B ad rectangulũ B C *a* (eo quod H F ad F *b* posita fuit vt C B ad B *a*) ergo, &c. *Modo si accuratè hæc verba perpendantur non poterit hic vsurpari vulgata definitio Eutocij, vel Mydorgij; nam cum sectiones A B, E F supponantur similes, ea tantummodo quæ in definitione similium sectionum perhibentur concedi possunt, & nihil amplius; igitur si in definitione non includitur particula illa [abscissæ H F, C B ad erecta, vel transuersa latera F* b, *B* a *sint proportionalia] delirantis po-*

tis potius, quàm demonstrantis esset dicere. Eo quod H F, ad F *b* posita fuit vt C B ad B *a*; *vbi nam, aut quando hoc suppositum est, si in definitione non continetur? Nec suspicari potest casu hæc verba in textu irrepsisse, cum in alijs locis repetantur, & ab eis pendeat tota demonstratio; igitur in definitione vulgata addenda est illa particula*, abscissæ sint in eadem ratione ad erecta;

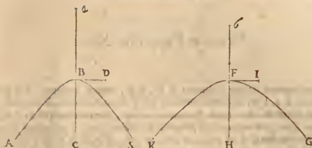


Rursus in propos. 11. *&* 1. *parte* 12. *quando conclusio demonstrationis est quod sectiones A B, E F similes sint: tunc quidem quia tenetur ostendere Apollonius definitionem traditam conuenire sectionibus A B, E F, non assumit incautè abscissas homologas C B, H F, sed ait in* 11. *propositione* ponamus C B ad B D vt H F ad F I, *& in* 12. *inquit*, nam posuimus H F ad F *b* vt C B ad B *a*, &c. *Postea in propositione* 16. *litera a*: ergo M A ad A P, *idest abscissa ad erectum* est vt O C ad C Q, *seu vt homologa abscissa ad latus rectum*, & angulus O æqualis est M: patet igitur, vt diximus in 11. ex 6. quod si, &c. *Ex quibus locis satis apertè colligitur (ni fallor) id quod supra rationibus non leuibus insinuaui, quod abscissæ proportionales esse debent erectis in sectionibus similibus.*



Sed hic animaduertendum est, eandem definitionem non posse aquè aptari sectionibus conicis, atque segmentis conicis similibus, vt perperam censuit Mydorgius: nam in segmentis conicis similibus A B C, & D E F diametrorum aquè ad bases inclinatarum abscissæ homologa ex sui natura determinatæ sunt, quandoquidem non possunt esse maiores, neque minores quàm G B, & H E, quæ inter bases A C, & D F segmentorum conicorum, & vertices B, E intercipiuntur;
Propos. 12. huius. lib. 1. *at si in conicis sectionibus A B S, & K F G sint axes transuersis* a B, *&* b P *ad sua latera recta B D, & F I in eadem proportione, tunc quidem similes erunt curuæ lineæ A B S, & K F G, quæ possunt habere indeterminatas, & multiplices longitudines, immo possunt in infinitum prolongari, si fuerint parabolæ*

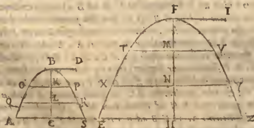
vel



vel hyperbola, nec habent bases, à quibus circumscribantur, igitur in sectionibus similibus A B, & G F homologa axium abscissa B C, F H non supponuntur iam dissecta, & determinata; quare possunt esse cuiuscunque mensura, & habere possunt eandem, & non eandem proportionem ad conterminas potentiales; & ideo ad vitandam incertitudinem adiungi debet determinatio, quod predicta homologa abscisse B C; F H proportionales sint lateribus rectis B D, F I, at in segmentis, seu portionibus sectionum conicarum similium inutilis omnino esset illa determinatio. An verò hæc mea sententia omninò reijci debeat alijs indicandũ relinquo.

Notæ in Proposit. XI.

a CVmque B C ad B L posita sit vt H F ad F N, &c. *Quia inuertendo D B ad B C eandem proportionem habet quàm I F ad F H, & C B ad B L est vt H F ad F N; ergo ex aquali ordinata D B ad B L eandem proportionem habebit, quàm I F ad F N; estque ordinatim applicata Q L media pro-*



portionalis inter abscissam B L, & latus rectum B D (cum in parabola quadratum Q L aquale sit rectangulo L B D) pariterque X N media proportionalis est inter F N, & I F; ergo Q L ad L B est vt X N ad N F, & antecedentium dupla, scilicet Q R ad L B, atque X Y ad N F in eadem ratione erunt. Non secus ostendetur O P ad K R vt T V ad M F. 11 lib.1.

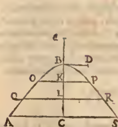
Notæ

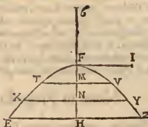
Notæ in Propoſit. XII.

SVpponamus itaque ſectiones A B, E F, carum inclinati, vel tranſuerſi B *a*, F *b*, & erecti eorum B D, F I ordinationes, & propoſitiones, vti diximus, &c. a *Ideſt. Sint axes inclinati, ſiue tranſuerſi B* a, *F* b, *& maneant ſigna, ordinationes, & proportiones eadem, quæ in præcedenti propoſitione; ſcilicet fiat C B ad B D, vt H F ad F I, & quia D B ad B* a *eſt vt I F ad F* b *(propter ſimilitudinem figurarum D B* a, *I F* b *) ergo ex æquali C B ad B* a *erit vt H. F ad F* b*; & comparando antecedentes ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad differentias in ellipſi erit B C ad C* a *vt F H ad H* b*: poſtea diuidantur tam B C, quàm F H in iiſdem rationibus in punctis K, L, M, N, & educantur ordinatim applicatæ, ſeu æquidiſtantes baſibus O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z.*

Quoniam figura ſectionis A B ſimilis eſt figuræ ſectionis E F erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B, & *b* H b in H F ad quadratum H F, vt C *a* in C B ad quadratnm C B (nam poſuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*, &c.) *Quoniam in figuris, ſeu rectangulis ſimilibus D B* a, *& I F* b *habet D B ad B* a *eandem proportionem, quàm*
21. lib. 1. *I F ad F* b, *& vt D B ad B* a, *ita eſt quadratum A C ad rectangulum B C* a, *pariterque vt I F ad F* b *ita eſt quadratum E H ad rectangulũ F H* b *ſed (ſicut in præcedenti nota dictum eſt) C* a *ad C B, ſeu rectangulum B C* a *ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm H* b *ad H F, ſeu quàm rectangulum F H* b *ad quadratum F H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F.*

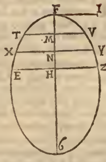
Atque quadratum H F ad H F in H *b* eſt vt quadratum C B ad B C in c C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit C B ad B *a*), ergo ex æqualitate, &c. *Ideſt ſumãtur axium abſciſſæ C B, H F, quæ ſint proportionales lateribus rectis B D, & F I, ſeu proportionales ſint lateribus tranſuerſis B* a, *& F* b, *& ſecẽtur abſciſſa B C, & F H proportionaliter in punctis K, L, M, N, & per puncta diuiſionum ducantur ordinatim applicatæ A C, Q L, E H, X N, &c. Quia ſectiones A B, E F ſupponuntur ſimiles; ergo ex definitione 2. huius A C ad C B eandem proportionem habebit, quàm E H ad H F, nec non Q L ad L B erit vt X N ad N F; & ideo quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionẽ habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F; & quia ex constructione iuxta leges definitionis 2. vt C B ad B* a *ita erat H F ad F* b, *& comparando antecedentes ad terminorũ ſummas in hyperbolis, & ad differentias in ellipſibus, habebit B C ad C* a*; ſeu quadratum B C ad rectangulum B C* a *eandẽ proportionem quàm F H habet ad H* b, *ſeu quàm quadratum F H habet ad rectangulum F H* b*; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum B C* a *eãdem proportionem habet, quàm quadratum E H ad rectangulum F H* b*; eſt verò latus rectum D B ad latus tranſuerſum B* a, *vt quadratum A C ad rectangulum B C* a,





B C a, *pariterque latus rectum I F ad transuersum F* b *est vt quadratum E H ad rectangulum F H* b, *igitur D B ad B* a *eandem proportionem habebit quàm I F ad F* b, *& ideo figura axium similes erunt.* 21. lib. 1.

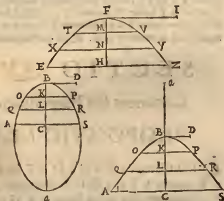




Notæ in Proposit. XIII.

a Sint axes earum B C, & inclinatus, seu transuersus B a, &c. *Addidi verba, quæ in expositione propositionis deficiunt. Hyperbole, seu ellipsis A B sit axis B C, & inclinatus, seu transuersus B* a, *& E F sit parabole, cuius axis F H, &c.*

b Alioquin sit (si possibile est) similis vni earum, & minima similis earum figuræ, quæ non sunt similes suis figuris: deinde possumus producere in singulis sectionibus potentes, &c. *Non nulla verba ex hoc textu expunxi vt superuacanea eiusq; sensus hic est. Si enim parabola E F similis est hyperbolæ, aut ellipsi A B (ex definitione similium figurarum) duci possunt in vnaquaque duarum similium sectionum ordinatim*

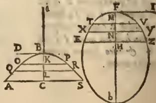


Defin. 2.

natim ad axium applicata, numero pares, quæ ad abſciſſas ſint proportionales, tum abſciſſæ inter ſe: Vnde ſequitur poſtrema concluſio, quæ in textu habetur, quod nimirum rectangulum a L B ad rectangulum a K B eandem proportionem habeat, quàm abſciſſa, L B ad abſciſſam K B: ſed quotieſcunque duo rectangula eandem proportionem habent, quàm baſes, illa ſunt aque alta: igitur altitudines a L, & a K æquales ſunt inter ſe, pars, & totum: quod eſt abſurdum.

Notæ in Propoſit. XIV.

ALioquin ſequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, &c. *In propoſitione deficit expoſitio, qua talis eſt. Sit A B qualibet hyperbole, & E F qualibet ellipſis. Dico A B ipſi E F ſimilem non eſſe. Sint eorum axes latera tranſuerſa, & recta eadem, qua in præcedenti propoſitione poſita ſunt. Et ſiquidem ſectiones A B, & E F ſimiles creduntur, neceſſario ex definitione ſecunda, duci poterunt ad axes ordinatim applicata numero pares proportionales abſciſſis, tum abſciſſæ inter ſe proportionales: & vt in præcedenti propoſitione oſtenſum eſt, quadratum R L ad quadratum P K, ſcilicet* a



21.lib.1. *rectangulum a L B ad rectangulum a K B in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm quadratum T N ad quadratum V M, ſeu quàm rectangulum b N F ad rectangulum b M F in ellipſi, ergo rectangulum a L B ad rectangulum a K B eandem proportionem habet, quàm rectangulum b N F ad rectangulum b M F: ſed eorundem rectangulorum baſes proportionales ſunt, eo quod L B ad B K erat vt N F ad F M; igitur eorundem altitudines proportionales erunt, ſcilicet a L ad a K eandem proportionem habebit, quàm b N ad b M, ſed in hyperqola a L maior eſt, quàm a K; in ellipſi verò contra b N minor eſt, quàm b M; igitur maior a L ad minorem a K eandem proportionem habebit, quàm minor b N ad maiorem b M. Quod erat abſurdum.*

Ibidem.

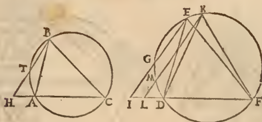
SECTIO QVINTA

Continens ſex Propoſitiones Præmiſſas,

PROPOSITIO I. II. III. IV. & V.

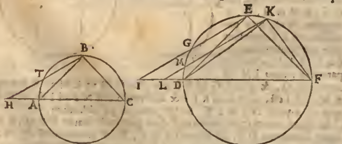
SI in triangulis A B C, D E F in duobus circulorum ſegmentis A T C, D G F deſcriptis, à duobus angulis B, E, educantur duæ rectæ lineæ B T H, E G I efficientes cum baſibus A C, D F duos angulos H, I æquales (incidentes in I

prima



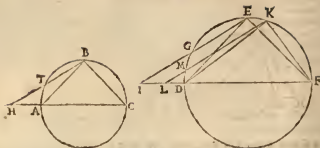
prima figura extra duo ſegmenta , & in ſecunda intra , at in tertia intra duos ſemicirculos) , & fuerit proportio plani rectanguli ex portionibus lineæ baſis inter angulum prouenientem , &
2 duos angulos reliquos trianguli , nempe A H in H C ad quadratum interceptæ inter prouenientem angulum , & circuli peripheriam , nempe ad quadratum H B in quolibet caſu eadem fit , quàm D I in I F ad quadratum I E , vel H A in H C ad quadratum H T ſit , vt D I in I F ad quadratum I G ; ſintque duo priores anguli , inter ſe æquales , & prouenientes extra duo
3 triangula poſiti : vel duo priores recti , & prouenientes intra
4 duos angulos non ſint recti ; aut duo priores non recti , & prouenientes recti intra duo triangula : vel duo priores diuerſæ ,
5 aut eiuſdem ſpeciei , ſed duæ lineæ efficiant duos angulos æquales cum lateribus duorum triangulorum ſubtendentibus angulos prouenientes : vtique duo priora triangula ſunt ſimilia .

Quia C H in H A ; nempe T H in H B ad quadratum H B , quod eſt, vt H T ad H B eandem proportionem habet , quàm D I in I F , nempe



G I in I E ad quadratum I E , quod eſt vt I G ad I E , erit B H ad H T, vt E I ad I G; ſimiliter, & eorum quadrata ; oſtendetur igitur ex æqualitate,

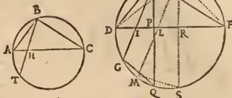
Y litate,



litate, quod si fuerit A H in H C ad quadratum H B, vt D I in I F ad quadratum I E, quod A H in H C ad quadratum H T sit etiam, vt I D in I F ad quadratum I G. Dico iam, quod triangulum A B C simile est triangulo D E F. Si enim hoc verum non est, non erit angulus A æqualis vni duorum angulorum D, vel F: sitque angulus D maior, quàm A, & fiat angulus K D F æqualis A, iungaturque F K; quia angulus K, veluti E, est æqualis angulo B; similia erunt triangula A B C, D K F, & educamus K L parallelam E I: quare K L F simile quoque erit B H C b
ideoque H A ad H B est vt D L ad L K, & H C ad H B, vt F L ad L K; igitur H A in H C, nempe B H in H T ad quadratum H B, quod est, vt H T ad H B, quæ ostensa est, vt I G ad I E, erit vt D L in L F, nempe K L in L M ad quadratum K L: & propterea M L ad L K erit vt G I ad I E in omnibus figuris; & hoc est absurdũ in prima figura: in secunda verò secentur bifariam E G, K M in N, O, & iungatur N O, quæ parallela erit L I, quia sunt duæ perpendiculares super K M, E G, quæ sunt parallelæ; ergo I N est æqualis L O, & quia E G ad E I iam ostensa est vt K M ad K L; ergo E N ad E I est, vt O K ad K L: & diuidendo erit N I ad I E, vt O L, quæ est æqualis N I ad L K. Et hoc quoque est absurdum. c d

In figura autem tertia educamus duas perpendiculares E P Q, K R S super diametrum D F, cui occurrant in P, R: & iungamus G Q, M S, quia erat G E ad E I, vt M K ad L K, & propter similitudinem triangulorum I E P, K L R, E I ad E P est, vt L K ad K R, atque E P ad E Q est, vt R K ad K S, & angulus G E Q æqualis est M K S; ergo E G Q simile e

Q simile est M K S, quare angulus G æqualis est angulo M, & propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus insistunt, æquales erunt, quod est absurdũ: est enim E F Q maior, quàm K F S; ergo duo triãgula A B C, D E F in omnibus figuris sunt similia. Quod erat ostendendum.



PROPOSITIO
Præmissa VI.

a DEinde sint duo anguli B, E qualescunque; sed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I, aut F E I: & supponantur reliqua omnia iam dicta.

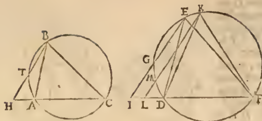
Quia proportio C H in H A ad quadratum H B supposita est, vt F I in I D ad quadratum I E, & H C, vel H A ad H B est, vt F I, vel D I ad I E; erit etiam H A ad H B, vt I D ad I E, & duo anguli H, I sunt æquales; igitur triangulum H B A, aut H B C simile est triangulo E D I, aut E F I, quare duo triangula A B C, D E F similia sunt; Et hoc erat ostendendum.

Notæ in Proposit. Præmissas I. II. III. IV. & V.

AFferuntur in hac sectione aliqua propositiones simul coacernata, qua lemmatica sunt, & vsum habent in sequentibus propositionibus; sanè coniecitur ex hoc titulo PRAEMISSAE rubeis characteribus inscripto, huiusmodi lẽmata Textui Apollonij ab Arabico Interprete, vel ab aliquo alio superaddita fuisse; licet Pappus Alexandrinus libro 7. afferat eadem ferè lemmata, tanquã propria, & conferentia ad Apollonij sexti libri intelligentiam.

Potest tamen propositio vniuersalis breuius exponi hac ratione. Si à verticibus duorum triangulorum à duobus circulis comprahensorum recta linea ducta efficiant cum basibus angulos aquales; atque eorundem segmentorum inter basim, & peripheriam interceptorum quadrata ad rectangula sub factis segmentis ba-

 sium



ſium eandem proportionem habeant, fuerintque anguli verticales inter ſe æquales, vel qui à lateribus, & à vertice ductis continentur, ſint æquales: ſemper triangula erunt ſimilia,

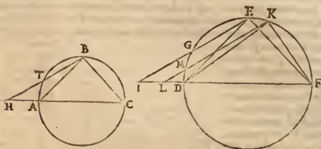
Dico iam, quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo D E F, ſi enim a
hoc verum non eſt, ſit angulus D maior, quàm angulus A, &c. *Textus alterari debuit, nam duo triangula B A C, & E D F ponuntur non ſimilia, & propterea æquiangula non erunt, ſcilicet non habebunt duos angulos æquales duobus angulis alterius trianguli; ſed ex hypotheſi anguli verticales A B C, & D E F æquales erant; ergo angulus B A C non erit æqualis angulo E D F, neque angulo E F D; alias dicta triangula eſſent æquiangula, & ſimilia, quod non ponitur; igitur neceſſe eſt, vt angulus A non ſit æqualis vni duorum angulorum D, vel F, poſtea rectangulorum A H C, & D I F tam latus A H ipſius H C non ſit maius, quàm D I ipſius I F, & ad punctũ D fiat angulus F D K æqualis angulo A.*

Quare K L F ſimile quoq; erit B H C, &c. *Quoniã angulus F D K æqualis* b
eſt factus angulo C A B, & angulus F K D ſeu ei æqualis F E D eſt ipſi angulo A B C æqualis (cum in ſimilibus circulorum ſegmentis exiſtant), igitur in triangulis F K D, & C B A tertius angulus K F D æqualis erit tertio angulo C; & propter parallelas K L, E I eſt angulus D L K æqualis angulo D I E; eſt verò angulus A H B ex hypotheſi æqualis eidem angulo D I E; ergò angulus D L K æqualis eſt angulo A H B, & F L K æqualis angulo C H B: at oſtenſus fuit angulus K F L æqualis angulo B C H; ergo angulo C B H æqualis eſt angulus F K L; ideoque triangula C B H, & F K L ſimilia erunt. Pariterq; duo triangula B A H, & K D L ſimilia erunt, cum angulus L æqualis ſit angulo H, & angulus K D L æqualis ſit interno B A H.

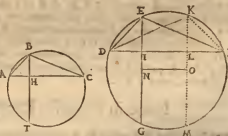
Et hoc eſt abſurdum in prima figura, &c. *Quoniam ſunt rectæ lineæ in* c
circulo applicatæ K M, E G parallelæ inter ſe; ergo coniunctæ rectæ lineæ E K, G M parallelæ erunt inter ſe, aut conuenient extra circulum cum diametro bifariam, & ad angulos rectos diuidente applicatas E G, K M; ſed eadem recta linea G M ſecat trianguli baſim F A I intra circulũ, aut extra ipſum inter puncta I, A, & F (propterea quod angulus E I F conſtituitur à duabus in circulo applicatis extra ipſum concurrentibus); ergo tres coniunctæ rectæ lineæ K E, M G, & I L, nec ſunt omnes inter ſe parallelæ, nec in vno puncto cõueniunt, & propterea E I, & K L

ſectæ

secta non erunt proportionaliter in punctis G, & M, sed prius ostensa fuit E I ad I G vt K L ad L M; quod est absurdum.



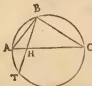
d In secunda verò secentur bifariam E G, K M in N O, &c. *Sunt enim in tertio casu K M, & E G perpendiculares ad basim D F; igitur si secentur bifariam in O, & N coniuncta recta linea N O diameter circuli erit, quandoquidem diuidit bifariam duas equidistantes in circulo applicatas; & ideo eas secat ad angulos rectos, sicuti D F easdem perpendiculariter secabat; & propterea I N O L parallelogrammum erit, cuius latera opposita N I, & O L aequalia erunt. Postea quia ostensa fuit I G ad I E, vt L M ad L K; ergo summa terminorum ad consequentes proportionales erunt; scilicet G E ad E I erit vt M K ad K L, & antecedentiũ semisses N E ad E I, vt O K ad K L: & diuidendo, duae aequales N I, O L eandem proportionem habebunt ad I E, & L K; ideoq; I E aequalis est L K. Et quoniã triangulum A B H simile est triangulo D K L; ergo A H ad H B eandem proportionem habet, quàm D L ad L K; estque triangulum B H C simile triangulo K L F; ergo B H ad H C est vt K L ad L F, & ex aequalitate vt A H ad H C ita est D L ad L F; erat autem segmentum A H non maius segmento H C; ergo D L maius non erit segmento L F; sed erat segmentum D I non maius segmento I F, igitur duo segmenta D I, & D L non sunt maiora, idest non sunt maiora medietate totius D F, sed diameter parallela ipsis K M, & E G secat D F bifariam; ergo K M, E G ad easdem partes diametri cadunt versus D, & sunt inter se parallelae; ergo inaequaliter à centro distant; ideoque inaequales erunt inter se, & earum meditates N E, O K inaequales erunt; & ablatis aequalibus N I,*

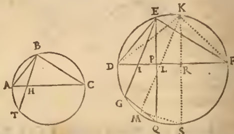


Lem. 1.

I, O L remanebunt I E, L K inæquales. Quod eſt abſurdum: oſtenſæ enim fuerunt prius æquales inter ſe.

In figura autem tertia ducamus duas perpendiculares, &c. *In quarto caſu ſupponuntur baſes A C, & D F per centra circulorum tranſire, eo quod anguli A B C, & D E F recti ſupponuntur, atque recta linea B H, E I non ſunt perpendiculares ſuper eaſdem baſes, licet intra circulos efficiant angulos B H C, & E I F inter ſe æquales: perfecta igitur conſtructione, vt prius ad diametrũ D F, ducãtur ex punctis E, & K perpendiculares E Q, K S, quæ diuidẽtur bifariã, & ad angulos rectos in P, & R. Et quoniam (vt in præcedenti caſu oſtẽſum eſt) G E ad E I eandem proportionem habet, quàm M K ad K L, cumque latera I E, L K ſint parallela, pariterque P E, & K R æquidiſtent, atque baſes I P, L R in directum poſitæ ſint, erunt triangula I E P, & L K R æquiangula, & ſimilia: & propterea I E ad E P erit, vt L K ad K R: eſt verò P E ad eius duplam E Q, vt R K ad eius duplam K S (cum diameter ſecet eas bifariam, quas perpendiculariter prius ſecabat) ergo, ex æquali ordinata, erit G E ad E Q, vt M K ad K S; ſuntq; anguli verticales G E Q, & M K S æquales, propterea quod continẽtur à rectis lineis quæ bina binis ſunt æquidiſtantes; ergo triangula G E Q, & M K S ſimilia ſunt inter ſe: & propterea angulus E G Q æqualis erit angulo K M S.* e

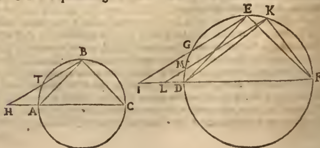




Et propterea ſegmentum E F Q maius ſimile erit ſegmento K F S minori: quod eſt abſurdum, &c. *Legendum puto. Et propterea periphería E F Q, & K F S, quibus inſiſtunt æquales erunt: quod eſt abſurdum. Eſt enim E F Q maior, quàm K F S.* f

Notæ in Propoſit. Præmiſſ. VI.

Deinde ſint duo anguli B, E qualeſcumque; ſed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I vel F E I, & conditiones, vti dixi- a



mus, &c. *Expositio, atque demonstratio huius propositionis obscura est propter nimiam eius breuitatem: itaque duo eius casus distingui debent hac ratione. In duobus triangulis A B C, D E F supponantur anguli H, & I aquales, pariterque anguli H B A, I E D aquales inter se; ideoque duo triangula A B H, & D E I similia erunt, & propterea A H ad H B eandem proportionem habebit, quàm D I ad I E; sed ex vniuersali hypothesi rectangulum C A H ad quadratum H B eandem proportionem habet, quàm rectangulum F I D ad quadratum I E, & componuntur proportiones rectangulorum ad quadrata iam dicta ex rationibus laterum circa angulos aquales H, & I, suntque ostensa proportiones A H ad H B, atque D I ad I E eadem inter se; igitur reliqua componentes proportiones, scilicet C H ad H B, atque F I ad I E eadem quoque erunt inter se, & comprahendunt angulos aquales H, & I; igitur triangula C H B, & F I E similia sunt inter se: & propterea angulus B C A aqualis erit angulo E F D, sed anguli B A C, & E D F aquales sunt inter se, quia eorum consequentes aquales erant in triangulis aquiangulis B A H, & E D I, igitur duo triangula B A C, & E D F aquiangula, & similia inter se erunt.*

Simili modo si supponantur anguli C B H, & F E I aquales, cum anguli H, & I aquales sint, erunt triangula B C H, & E F I similia inter se, & vt prius, ostendentur quoque triangula ablata B A H, E D I aquiangula, & similia inter se (propterea quod circa angulos aquales H, & I habent latera proportionalia); & ideo residua triangula C A B, & F D E erunt quoque similia, vt propositum fuerat.

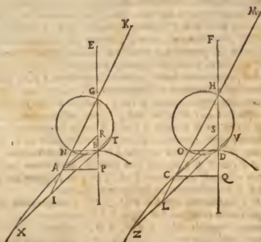
SECTIO SEXTA

Continens Proposit. XV. XVI. & XVII.

PROPOSITIO XV.

Duarum hyperbolarum, aut ellipsium, si figuræ diametrorum, quæ axes non sint, fuerint similes, atque potentes contineant cum diametris angulos æquales: vtique sectiones sunt similes.

Sint sectiones A B, C D hyperbolicæ, vel ellipticæ earum diametri, quæ non sint axes I A K, L C M, & earum centra G, H, & duo axes sint E B, F D: & educamus duas tangentes A R, C S ad duos axes, quæ continebunt cum duabus diametris A K, C M duos angulos æquales, eo quod parallelæ sunt potentialibus ad diametros eductis; & educamus à B, D ad duabus diametros A K, C M tangentes B N, D O, & circumducamus super triangula B N G, H D O duos circulos, & ex A, C educamus ad axes duas potentiales A P, C Q, & per B, D ducamus I B T, L D V parallelas ipsis A R, C S, quæ secent duos circulos in B, b T, D, V: eritque G I in I N, scilicet ei æquale T I in I B ad quadratum



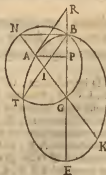
tum potentialis I B, vt H L in L O, seu L V in L D ad quadratum L D, eò quod quælibet ex dictis proportionibus eadem est proportioni figuræ K A, & M C (39. ex 1.), ergo T I ad I B est, vt V L ad L D, & angulus I, qui æqualis est ipsi R A G æqualis est angulo L, qui æqualis est S C H; igitur angulus G æqualis etiam est angulo H: & propterea G A R simile est H C S, & pariter G A P, H C Q sunt similia, quia P, Q sunt recti, vnde A P R, C Q S sunt etiã similia, & proportio vniuscuiusq; eorum, nempe G P, P R ad P A, est, vt proportio H Q, S Q ad C Q; igitur G P in PR ad quadratum P A, nempe B E ad erectum illius (39. ex 1.) est vt H Q in Q S ad quadratum C Q, nempe D F ad erectum illius (39. ex 1.); igitur figuræ duorum axiũ sunt similes, & duæ sectiones similes sunt (12. ex 6. (sed oportet in ellipsi, vt duæ diametri, ideoque duo axes sint simul aut transuersi, aut simul recti. Et hoc erat propositum.

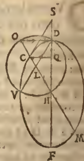
37. lib. 1.

Propos. 2. præmiss.

C

37. lib. 1.

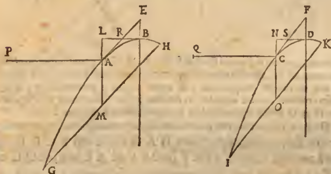




PROPO-

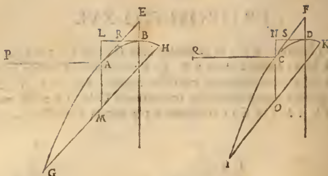
PROPOSITIO XVI.

SI fectiones A B, C D fimiles inter fe, quæ fint prius parabolæ, tangant lineæ A E, C F terminatæ ad earum axes E B, F D, & contineant cum illis angulos æquales E, F, & in qualibet earum educantur ordinationes G H, I K ad diametros L A M, N C O tranfeuntes per puncta contactus axibus



æquidiftantes, & fuerit proportio fuarum abfciffarum A M, C O ad lineas tangentes A E, C F eadem; vtique ordinationes abfcindent ex fectionibus fimilia fegmenta, & fimiliter pofita, vt G A H, I C K. Si verò ordinationes fecuerint fimilia fegmenta; vtique fectiones fimiles erunt, & abfciffarum ad lineas tangentes proportio erit eadem, atque lineæ tangentes continebunt cum axibus angulos æquales.

Educamus enim duas B L, D N fuper duos axes B E, F D perpendiculares, quæ tangent fectiones in B, D: & ponamus A P ad duplam A 32. lib. 1.
E, vt R A affumpta ad A L ei fimilem, nec non C Q ad duplam C F, vt affumpta S C ad C N; igitur P A, Q C funt erecti duarum diametrorum L M, N O (52. ex 1.) ergo G M poteft P A in A M, (12. ex 1.) 49 lib. 1.
& fimiliter I O poteft O C in C Q, (12. ex 1.) & propter æquidiftan- 11. lib. 1.
tiam E B, L A, atque F D, C N funt fimilia E R B, R L A, atque D Ibidem.
S F, S N C; & duo anguli E, F fuppofiti funt æquales; igitur angulus R A L æqualis eft S C N, & N, L funt recti; quare R A ad A L, nempe P A ad duplam A E eft, vt S C ad N C, nempe vt Q C ad duplam C F, & M A ad A E fuppofita eft, vt O C ad C F: ergo M A ad A P eft, vt O C ad C Q, & angulus O æqualis eft M. Oftendetur igitur (vt



diximus in 11. ex 6.) quod si ad abscissas A M, C O egrediantur quælibet potentes, ad sua abscissa eandẽ proportionẽ habebunt si abscissæ ad abscissas sint in eadem proportione, & quod anguli à potentialibus, & abscissis contenti, erunt æquales in duabus sectionibus: quare erit segmentum H A G simile segmento I C K atque similiter positum.

Defin. 7. huius.

Deinde ijsdem signis in eisdem figuris manẽtibus, vt prius designatis supponatur, segmentum H A G simile ipsi K C I. Dico, quod angulus E æqualis erit F, & M A ad A E erit, vt O C ad C F.

Defin. 7. Quoniam duo segmenta sunt similia erit angulus O æqualis M, & duo anguli E A L, F C N illis æquales, sunt quoque inter se æquales; ergo duo anguli F, E, qui illis æquales sunt, erunt inter se æquales, eoquod A E, C F parallelæ sunt G H, I K, & anguli N, L sunt recti; ergo duo

49. lib. 1. triangula proportionis sunt similia, ideoque R A ad A L, nempe P A ad

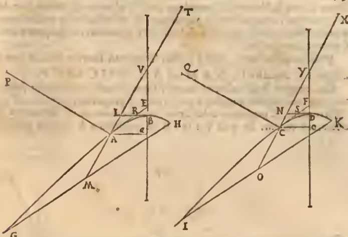
11. lib. 1. duplam A E est, vt C S ad C N, nempe Q C ad duplam C F: & quia G M potest P A in A M (12. ex 1.) & similiter I O potest Q C in C O; b ergo P A ad G M est, vt Q C ad O I, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M est, vt C F ad C O: & iam ostensum est, quod duo anguli E, F sunt æquales. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XVII.

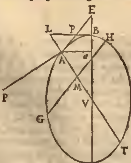
Deinde sectiones sint hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua a supponantur, vt prius.

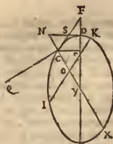
Educamus C c perpendicularẽ super axim D F, & A a perpendicularem super axim B E; atque V, Y sint duo centra. Ergo (propter similitudinem duarum sectionum) erit V a in a E ad quadratum A a potentis,

vt Y c



vt Y e in e F ad quadratum C e (39. ex 1.) quæ habent eandem pro- 37. lib. 1. 12. huius.
portionem, quàm figuræ axis habent, & angulus F suppositus est æqualis
b E : ergò Y e C simile est V e A : & propterea angulus Y æqualis est V, 6. præmis. huius.
& angulus F C Y æqualis E A V : & propter similitudinem N D Y, L B
V æquales sunt duo anguli C N S, A L R ; ergo similia sunt C N S, A L
R. Quare C S assumpta ad ei coniugatam C N est vt R A ad A L : & po-
namus C Q ad duplam C F, vt C S ad C N, nec non A P ad duplam
A E, vt A R ad A L ; igitur Q C, A P sunt erecti duarum diametrorum
C Y X, A V T (53. 54. ex 1.) sed C F ad C X duplam ipsius C Y est 50. lib. 1.
vt A E ad A T duplam ipsius A V, propter similitudinem C F Y, A E V :
ergo ex æqualitate Q C ad C X diametrum inclinatam, seu transuersam
c est vt A P ad A T ; & propterea figuræ earundem diametrorum sunt simi-
les, & quia C O ad C F supposita est, vt A M ad A E : ergo ex æqualitate Q C ad C O est, vt P A ad A M : Quare potentes ad duo eius abscissa C O, A M, à quibus diuidũtur bifariam, eãdem proportionem habent : & proportio abscis





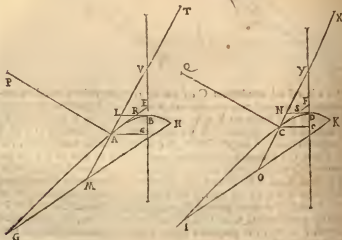
ſarum in vna ſectionum ad homologa abſciſſa alterius eſt eadem (12. ex 6.), & anguli compræhenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; quia æquales ſunt duobus angulis R A L, S C N æqualibus, & propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia.

Defin. 7. huius.

Poſtea oſtendetur, quod ſi duo ſegmenta fuerint ſimilia, erit angulus F æqualis E, & A M ad A E, vt O C ad C F.

Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales, & erit proportio potentium ad abſciſſas eadem, & proportio abſciſſarum, in vna earum ad ſua homologa in altera, erit eadem. Et quia V a in a E ad quadratũ a A eandem propor-

Defin. 7. huius.

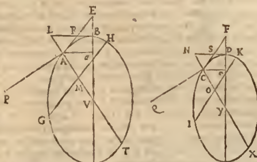


tionem habet, quàm Y c in c F ad quadratum c C, & duo anguli a, & c ſunt recti; atque angulus C, nempe O æqualis eſt A, nempe M, propter ſimilitudinem ſegmentorum: ergo triangulum A E V ſimile eſt C F Y, & angulus V æqualis eſt angulo Y; pariterque angulus E æqualis eſt F, & A V ad A E eandem proportionem habet, quàm Y C ad C F. Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F; ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius eſt, vt C X diameter ad C Q erectum eius (53. 54. ex 1.) & T M in M A ad quadratum M G eandẽ proportionem habet, quàm X O in O C ad quadratum O I: at ſuppoſitum eſt quadratum A M ad quadratum M G, vt quadratum C O ad quadratum O I; ergo ex æqualitate T M in M A ad quadratum A M, nempe T M ad M A, eandem proportionem habet, quàm X O in O C ad

21. lib. 1.

qua-

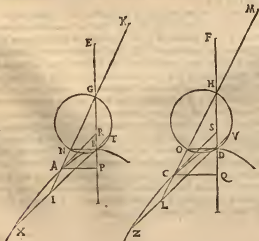
quadratũ O C, nempe X O ad O C; quare diuidendo, vel cõponendo, & ex æqualitate A M ad A E est vt C O ad C F: & iã ostensũ est, quod duo anguli F, & E sunt æquales. Quare patet propositum.



Notæ in Proposit. XV.

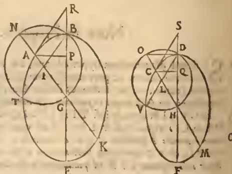
a SI figuræ diametrorum hyperbolarum, aut ellipsium fuerint similes dissimilium axium, & potentes illarum diametrorum contineant simul angulos rectos, vtique sectiones similes sunt, &c. *Textus mendosus huius propositionis ex subsequenti expositione, & demonstratione corrigi debuit.*

b Et G I in I N æquale ipsi T I in I B ad quadratum I B potentis est, vt H L in L O æquale ipsi V L in L D ad quadratum L D; quia, &c. *Quoniam à puncto B sectionis A B ad diametrum K A I ducuntur ordinatim applicata B I, & B N contingens sectionem in B secantes diametrum in I, & N; igitur rectangulum G I N ad quadratum ordinatim applicata I B eandem pro-* 37. lib. 1.



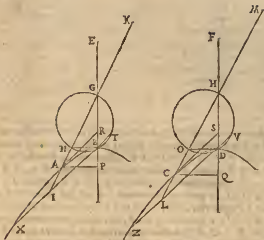
por-

portionem habebit, quàm latus transuersum K A ad eius latus rectum: eadem ratione in sectione C D erit rectangulum H L O ad quadratum ordinatim applicata D L, vt latus transuersum M C ad eius latus rectum; propterea quod à puncto D ducitur D O sectionem contingens, & D L ordinatim applicata ad diametrum M C, ei occurrentes in L, & O. Et quoniam ex hypothesi latus transuersum K A ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus transuersum M C ad eius latus rectum, eum figura harum diametrorum supposita sint similes; ergo rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D: deinde quia in duobus triangulis G B N, & H O D sunt duo anguli G B N, & H D O aquales,
Conuers. 32. lib. 1. *nẽpe recti (eum B N, & D O sectiones contingentes in terminis axium E B, & F D efficiant cum ipsis angulos rectos) atq; à verticalibus angulis B, & D ducuntur ad bases recta linea B I, D L efficientes angulos I, & L aquales, eo quod aquales sunt angulis aqualibus R A G, & S C H propter aquidistantiam linearum B I, A R, atque linearum D L, S C, & insuper rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad qua-*
Propos. 2. premiss. *dratum L D; igitur triangula G B N, & H D O similia sunt inter se; & propterea angulus G aqualis erit angulo H.*



Et proportio vniuscuiusque eorum, nempe G P, P R ad P A est, vt proportio H Q, Q S ad C O; &c. *In triangulis enim similibus G P A, & H Q C circa angulos rectos P, & Q erit G P ad P A, vt H Q ad Q C: pariter in duobus triangulis similibus R P A, & S Q C habebit R P ad P A eandem porportionem quàm, S Q ad Q C; proportio verò rectanguli G P R ad quadratum P A componitur ex ijsdem rationibus laterum circa angulum rectum P: pariterque proportio rectanguli H Q S ad quadratum Q C ex rationibus laterum circa angulum rectum Q componitur, suntque ostensa prædicta componentes proportiones eadem inter se; igitur rectangulum G P R ad quadratum P A eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H Q S ad quadratum Q C; sed habet rectangulum G*
37. lib. 1. *P R ad quadratum P A eandem proportionem, quàm axis transuersus E B ad eius latus rectum (propterea quod ab eodem puncto A sectionis ducitur contin-*
Ibidem. *gens A R, & ordinatim applicata ad axim A P) atque eodem modo rectangulum H Q S ad quadratum Q C eandem proportionem habet, quàm axis transuersus F D ad eius latus rectum; igitur axis transuersus E B ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus transuersum F D ad eius latus rectum; & propterea figura axium duarum sectionum A B, & C D similes in-*
12. huius. *ter se erunt; & ideo conica sectiones similes erunt.*

Sed



Sed oportet in ellipsi, vt duo axes sint simul, aut transuersi, aut recti simul, &c. *Addidi verba, quæ videntur in textu deficere. Sed oportet in ellipsi, vt duæ diametri, ideòque duo axes sint simul, aut transuersi, aut simul recti. Licet enim multoties diametri coniugatæ ellipsium æquales esse possint, nihilominus ea sumi debent, quæ ad easdem partes respiciunt axes transuersos, alias constructio, atque demonstratio non sequeretur, vt manifestum est.*

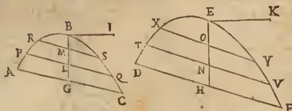
MONITVM.

PRo intelligentia propos. 16. & 17. præmitti debent tria hæc lemmata.

LEMMA VI.

SI in duobus parabolicis segmentis A B C, & D E F bases A C, & D F cum diametris G B, & H E æquales angulos G, & H non rectos contineant, atque efficiant abscissas G B, & H E diametrorum ad latera recta B I, & E K proportionalia; erunt segmenta similia inter se.

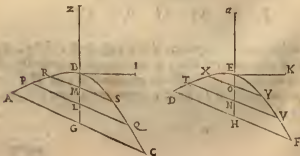
Secentur



Secentur diametrorum abscissa G B, & H E in ijsdem rationibus in L, M, N, O, & ab ijsdem punctis educantur basibus æquistantes, seu ad diametros ordinatim applicatæ P Q, R S, T V, X Y. Quoniam ex hypothesi G B ad B I 11.lib. 1. *est, vt H E ad E K; estque A G media proportionalis inter G B, & B I; pariterque D H media proportionalis est inter H E, & E K; igitur A G ad G B est, vt D H ad H E: Et quoniam inuertendo L B ad B G est, vt N E ad E H, atque B G ad B I posita fuit, vt H E ad E K; ergo ex æquali ordinata L B ad B I erit, vt N E ad E K, quare vt L B ad P L, mediā proportionalē inter L B, & I B, ita erit N E ad N T mediam proportionalem inter N E, & E K. Eodem modo ostendetur, quod R M ad M B eandem proportionem habet, quàm X O ad O E: & hoc semper continget in quibuslibet alijs diuisionibus proportionalibus abscissarum, suntque anguli G, & H æquales; igitur segmenta A B C, &* Defin.7. huius. *D E F similia sunt inter se. Quod erat ostendendum.*

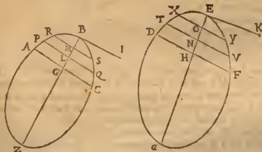
LEMMA VII.

SI in duobus segmentis A B C, & D E F hyperbolicis, aut ellipticis, bases A C, & D F cum diametris G B, & H E, æquales angulos G, & H obliquos continentes, efficiant abscissas G B, & H E proportionales lateribus rectis B I, & E K, atque transuersis B Z, & E a, erunt segmenta similia inter se.



Sece-

Secentur abscissæ G B, & H E in ijsdem rationibus, ducanturque ordinatim applicatæ vt in præcedenti factum est. Quoniam G B ad B I est, vt H E ad E K, & inuertendo Z B ad B G est, vt a E ad E H, ergo ex æquali ordinata Z B latus transuersum ad B I latus rectum erit, vt a E latus transuersum alterius sectionis ad E K eius latus rectum: est verò rectangulum Z G B ad quadratum ordinatim applicatæ G A, vt latus transuersum Z B ad rectum B I; pariterque rectangulum a H E ad quadratum ordinatim applicatæ D H, vt transuersum a E ad latus rectum E K, suntque prædicta latera figurarum ostẽsa proportionalia; igitur rectangulum Z G B ad quadratum A G eandem proportionem habet, quàm rectangulum a H E ad quadratum D H; sed quadratum B G ad rectangulum Z G B eandem proportionem habet, quam G B ad G Z (propterea quod G B est illorum altitudo communis) pariterque quadratum E H ad rectangulum a H E est, vt H E ad H a, seu vt G B ad G Z; igitur quadratum G B ad rectangulum Z G B eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad rectangulum a H E; quare ex æquali quadratum G B ad quadratum G A eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratũ H D; ideoque inuertendo A G ad G B erit vt D H ad H E. Rursus, quia inuertendo L B ad B G est vt N E ad E H; sed G B, atque H E ad latera trãsuersa proportionalia sunt; igitur L B ad B Z erit vt N E ad E a; & propterea, vt prius quadratum L B ad rectangulum Z L B erit, vt quadratum E N ad rectangulum a N E; estque rectangulum Z L B ad quadratum ordinatim



applicatæ P L, vt rectangulum a N E ad quadratum T N, (scilicet vt latera transuersa ad recta, quæ proportionalia ostensa sunt); igitur ex æquali ordinata quadratũ B L ad quadratum P L eandem proportionẽ habebit, quàm quadratũ E N ad quadratum T N; quare vt prius dictum est, P L ad L B eandem proportionem habebit, quàm T N ad N E; & hoc semper contingit in reliquis omnibus diuisionibus abscissarum in eisdem rationibus sectis; suntque anguli G, & H æquales inter se, licet non recti; igitur (ex definitione 7.) segmenta A B C, & D E F similia sunt inter se. Quod erat ostendendum.

LEMMA VIII.

SI duo hyperbolica, aut elliptica segmenta A B C, D E F fuerint similia, quorum bases A C, D F efficiant cum diametrorum abscissis B M, E O angulos æquales M, & O; sintque eorum transuersa latera T B, Z E, recta vero B L, E Q. Dico figuras eorum; siue rectangula T B L, & Z E Q similia esse.

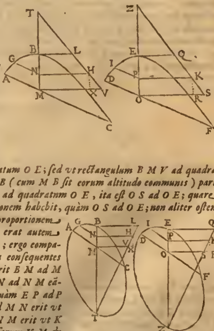
Secentur segmentorum abscissæ M B, O E proportionaliter in N, P, & per ea puncta ducantur ordinatim ad diametros applicatæ G N, I P æquidistantes basibus, efficientes abscissas B N, E P, coniunganturq; duæ rectæ lineæ T L, Z Q secantes rectas lineas N H, M V, P K, O S æquidistantes lateribus rectis B L, E Q in punctis H, V, K, S, atque à punctis H, & K ducantur rectæ lineæ H X, K R parallelæ diametris occurrentes ipsis M V, O S in X, & R. Quoniam segmenta supponuntur similia erit A M ad M B, vt D O ad O E, & G N ad N B erit vt I P ad P E, atque quadratum A M, seu ei æquale rectangulum B M V, ad quadratum M B eandem proportionem habebit, quàm quadratum D O, seu ei æquale rectangulum E O S ad quadratum O E; sed vt rectangulum B M V ad quadratum M B ita est M V ad M B (cum M B sit eorum altitudo communis) pariterque vt rectangulum E O S ad quadratum O E, ita est O S ad O E; quare M V ad M B eandem proportionem habebit, quàm O S ad O E; non aliter ostendetur N H ad N B eandem proportionem habere, quàm P K ad P E: erat autem M B ad B N vt O E ad E P; ergo comparando antecedentes, & postea consequentes ad differentias terminorum erit B M ad M N vt E O ad O P; atque B N ad N M eandem proportionem habebit, quàm E P ad P O. Quare ex æquali V M ad M N erit vt S O ad O P, atque H N ad N M erit vt K P ad P O; & differentiæ ipsarum V M & H N idest X V ad M N, seu ad X H eandem proportionem habebit, quàm differentia ipsarum S O, & K P, idest S R ad O P, seu ad R K; quapropter V X ad X H erit vt S R ad R K; sed quia X V, L B inter se, nec non X H, & B T sunt parallelæ, atq; etiam S R, Q E inter se, nec nō R K, & E Z sunt æquidistantes; erunt triangula V X H, & L B T simi-

Defin. 7. huius.

12. 13. lib. 1.

Idem.

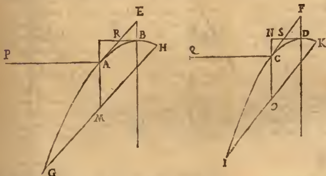
Lem. 1. lib. 5.



T similia, pariterque triangula S R K, & Q E Z inter se similia; ideoque erit L B ad B T vt V X ad X H, pariterque Q E ad E Z erit vt S R ad R K; erat autem prius V X ad X H, vt S R ad R K; igitur L B ad B T eandem proportionem habebit, quàm Q E ad E Z; & propterea circa rectos angulos B, E, figuræ sectionum similes erunt inter se. Quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. XVI.

a Ergo M A ad A P est vt O C ad C Q, & angulus O æqualis est M, ostendetur (vt diximus in 11. ex 6.) quod, &c. *Sequitur enim ex æqualitate ordinata, quod M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q, cumque sint duo segmenta parabolica H A G, & K C I, quorũ diametri A M, & C O efficiunt cum basibus G H, & K I angulos M, & O æquales inter se (cum sint æquales angulis R A L, & S C N æqualibus à contingentibus*



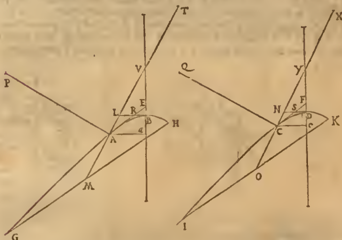
verticalibus parallelis basibus, & à diametris contentis) atque abscissa M A ad latus rectum A P eandem proportionem habet, quàm altera abscissa O C ad C Q latus rectum alterius sectionis; igitur duo segmenta H A G, & K C I similia sunt inter se. Lem. 6. huius.

b Et quia G M potest A P in A M, & similiter I O potest C Q in C O; ergo P A ad G M est, vt C Q ad I O, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M, est vt F C ad C O; &c. *Sensus huius textus confusi, talis est. Quia segmenta H A G, & K C I similia supponuntur erit A M ad M G, vt C O ad O I, & quadratum A M ad quadratum M G erit vt quadratum C O ad quadratum O I; est verò rectangulum P A M æquale quadrato G M; pariterque rectangulum Q C O est æquale quadrato I O; igitur quadratum A M ad rectangulum P A M eandem proportionem habet, quàm quadratum C O ad rectangulum Q C O; & propterea M A ad A P eandem proportionem habebit, quàm C O ad C Q; sed prius ostensa fuit P A ad A E, vt Q C ad C F; igitur ex æquali ordinata erit M A ad A E,* Defin. 7. huius. 11. lib. 1.

ad A E, vt O C ad C F, suntque anguli E, & F æquales, vt dictum est. Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. XVII.

DEinde sint sectiones hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua in suo statu, &c. *Idest. Supponantur sectiones hyperbolicæ, vel ellipticæ A B, & C D similes inter se, scilicet figura axium V B, & Y D sint similes inter se, atque à verticibus A, & C duarum diametrorum A M, & C O ducta sint re-* a

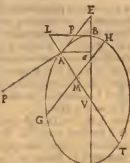


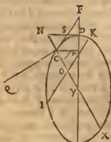
cta lineæ contingentes A E, & C F, efficientes cum axibus angulos A E B, & C F D æquales, sintque H G, & K I ordinatim ad diametros applicatæ, scilicet æquidistantes contingentibus verticalibus; & habeat abscissa M A ad portionem contingentis A E eandem proportionem, quàm abscissa O C habet ad portionem contingentis C F; Dico segmenta H A G, & K C I similia esse inter se.

Ergo Y c C simile est V a A, &c. *Quoniam duæ ordinatim ad axes applicatæ A a, & C c perpendiculares sunt ad axes, erunt in triangulis A a E, & C c F duo anguli a, & c recti: atque ex hypothesi duo reliqui anguli E, & F æquales quoque sunt; igitur tertius angulus a A E æqualis est tertio angulo c C F, cumque in duobus triangulis V A E, atque Y C F ab eorum verticibus A, & C ducuntur ad bases V E, & Y F duæ rectæ lineæ A a, & C c continentes cum basibus angulos æquales, nempe rectos, & rectangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habet, quàm rectangulum Y c F ad quadratum c C, vt in textu ostensum est: atq; duo anguli a A E, & c C F æquales ostensi sunt inter se; igitur erunt triangula V A E, & Y C F similia inter se; ergo angulus V æqualis est angulo Y, atque angulus E A V æqualis erit angulo F C* b

ex 37. lib. 1. Propos. 6 præmiss.

Y:





Conuerſ. 32.lib.1.

Y: poſtea, quia B L, & D N contingunt ſectiones in verticibus axium efficient angulos V B L, & Y D N rectos, cũque duo anguli V, & Y oſtenſi ſint æquales, in triangulis V B L, Y D N, anguli V L B, & Y N D æquales erunt inter ſe, & qui deinceps A L R, & C N S ſunt æquales inter ſe; & ideo triangula A R L, & C S N ſimilia ſunt inter ſe.

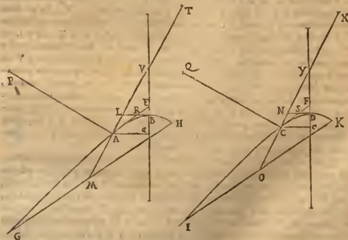
c Et propterea figuræ earundem diametrorum ſunt ſimiles, &c. *Quia ex hypotheſi M A ad A E erat, vt O C ad C F; atque (propter ſimilitudinem triangulorum A E V, & C F Y) vt E A ad duplam ipſius A V, ſeu ad latus tranſuerſum A T, ita eſt F C ad duplam ipſius C Y, ſeu ad latus tranſuerſum C X alterius ſectionis; ergo ex æquali ordinata erit M A ad A T, vt O C ad C X; oſtenſum autem fuit latus tranſuerſum T A ad A P latus rectum eius habere eandem proportionem, quàm alterius ſectionis latus tranſuerſum X C ad eius latus rectum C Q; ergo ex æquali ordinata M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q; quare duæ abſciſſæ A M, & O C eandem proportionem habent ad latera recta, atque ad tranſuerſa earundem diametrorum, atque efficiunt baſes H G, & K I cum diametris angulos M, & O æquales inter ſe: propterea quod æquales ſunt angulis E A V, & F C Y æqualibus* Defin. 7. huius. *(propter æquidiſtantiam rectarum H G, & A E; nec non K I, & C F) igitur erunt duo ſegmenta H A G, & K C I ſimilia inter ſe.*

d Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales: & erit proportio potẽtium ad abſciſſa eadem, & proportio abſciſſarum in vna earum ad alia ſimilia eadẽ, quia V *a* in *a* E ad quadratum A *a*, eſt vt Y *c* in *c* F ad quadratum C *c*, & duo anguli *a*, & *c* ſunt æquales; ergo angulus Y æqualis eſt angulo V, & angulus C, nempe O æqualis A, nempe M propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum; igitur A E V ſimile eſt Y F C, & angulus E; &c. *In hoc textu nonnulla verba deficiunt, aliqua verò tranſpoſita ſunt, vt nullus ſenſus colligi poſſit: tamen eum reſtitui poſſe cenſeo vt ibidem videre eſt. Quoniam duo ſegmenta H A G, & K C I ſupponuntur ſimilia efficient diametri A M, & C O cum baſibus G H, & K I angulos M, & O æquales, licet non rectos;* Lem. 8. huius. *eruntque figuræ earumdem diametrorum ſimiles inter ſe: & propterea habebit T A ad eius erectum eandem proportionem, quàm X C ad eius latus rectum;* 15. huius. *igitur ſectiones A B, & C D ſimiles ſunt, ideſt ductis axibus V B, & Y D* 47. lib. 2. *erunt figuræ axium ſimiles inter ſe: ducuntur verò à punctis A, & C ad axes* 12. huius. *ordinatim applicati A a, & C c, atque contingentes A E, & C F; igitur re-* 37. lib. 1.

ctangu-

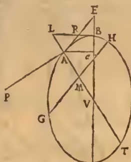
ctangulum V a E ad quadratum a A candem proportionem habebit; quàm axis transuersus ad eius erectum, seu quàm axis transuersus alterius sectionis C D ad eius erectum: sed in eadem proportione est rectangulum T c F ad quadratũ
37. lib. 1. *c C; igitur in duobus triangulis A V E, & C T F recta A a, & C c cũ basibus angulos aquales a, & c, nempe rectos efficiunt, cum ordinatim applicata sint ad axes; atque duo anguli verticales V A E, & T C F aquales sint inter se, cum propter parallelas aquales sint angulis O, & M aqualibus in segmentis similibus;*
Propof. 7. præmiss. *igitur duo triangula A E V, & C F Y aquiangula, & similia sunt inter se: & propterea V A ad A E erit, vt Y C ad C F, &c.*

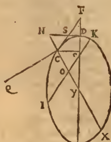
Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F: ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius, &c. *In hoc textu nonnulla videntur deficere, eiusq; sensus talis erit. Quia veluti supra dictum est, triãgula R A L, & S C N similia sunt inter se, habebit R A ad A L eandem proportionem, quàm S C ad C N: Ponamus iam P A ad duplam A E, vt R A ad A L, & Q C ad duplam C F, vt S C ad C N, erunt A P, & C Q latera recta diametrorum A M, & O C; sed earundem diametrorum figura ostensa sunt* e
50 lib. 1. Lem. 8. *similes; igitur latus transuersum A T ad A P erectum eius est, vt latus transuersum X C ad C Q erectum eius. Et quia vt latus transuersum ad rectum*



21. lib. 1. *ita est rectangulum T M A ad quadratum M G, & similiter rectangulum X O C ad quadratum O I eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum, scilicet eandem, quàm habent latera figurarũ earundẽ diametrorũ; igitur rectangulum T M A ad quadratum M G eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum X O C ad quadratum O I; habet verò M G ad M A eandem proportionem, quàm I O ad O C propter similitudinem segmentorum; ergo quadratum G M ad quadratum M A erit vt quadratum I O ad quadratum O C: & propterea ex aquali ordinata rectangulum T M A ad quadratum M A, seu T M ad A M*

ad A M eandem proportionem habebit, quàm X O C ad quadratum O C, seu eandẽ, quàm habet X O ad C O, & comparando consequẽtes ad differẽtias terminorum M A ad A T eandem proportionem habebit, quàm O C ad C X: erat autẽ prius T A ad A E, vt X C ad C F; igitur ex æquali M A ad A E erit, vt O C ad C F, & fuerunt ostensi anguli E, & F æquales. Quod erat ostendendum.

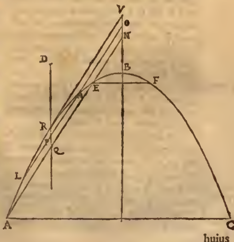




SECTIO SEPTIMA

Continens Proposit. XVIII. & XIX.

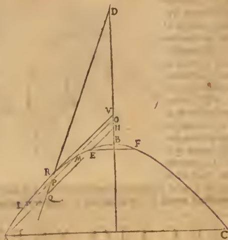
Cuiuslibet sectionis A B C duo segmenta C F, A E cadentia inter duas ordinationes A C, E F ad vtrasque partes axis B V sunt inter se similia, & similiter posita, nec sunt similia alteri segmento (nisi in ellipsi, in qua quatuor segmenta memorata in propositione 8. sunt æqualia, similia, & similiter posita, quæ alteri segmẽto similia nõ sunt.



a Quoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non cõgruunt duo segmenta GI, KH in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia alteri segmento: si enim hoc fieri potest, sit segmentum L M simile segmento F C. Et quia F C congruit A E. Ergo duo segmenta L M, A E sunt similia, producamus A E, L M
b quousque occurrant axi in N, O, erit angulus N æqualis O (vti demonstrauimus in 16. & 17. huius

huius) atque A N parallela erit L O. Educatur iam R Q bifariã diuidens A E, L M in P, Q: quare erit diameter sectionis (32. ex 2.) & educatur R V parallela A N, quæ sectionẽ contingat (18. ex 1.). Et quia duo segmenta L M, A E sunt similia habebit maior Q R ad eandem R V eandem proportionẽ, quàm habet minor R P; quod est absurdum. Quare non sunt similia duo segmenta A E, C F alteri segmento. Quod erat ostendendum.

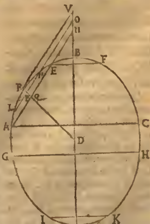
28. lib. 2.
17. lib. 1.
16. 17. huius.



Notæ in Proposit. XVIII. & XIX.

a Quoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non congruunt duo segmenta G I, K H in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia alteri segmento, &c. *Idest. Sit prius sectio A B C parabole, vel hyperbole. Quoniam duæ A C, & E F ordinatim ad axim B D applicatæ abscindunt ex vtraque parte axis duo segmenta A E, & C F congruentia, propterea similia erunt, atque similiter posita. Secundo, in ellipsi ductæ sint ad axim quatuor ordinatim applicata, quarum bina extrema E F, & I K æqualiter à centro D distent; pariterque binæ intermediæ A C, & G H æqualiter distent ab eodem centro: quare quatuor segmenta G I, H K, C F, & A E æqualia erunt, & sibi mutuo congruent, & propterea similia quoque inter se erunt.*

7. huius
8. huius.



b Erit angulus N æqualis O, vti demõstrauimus, &c. *Quoniam duo segmenta L M, & A E, ponuntur similia, atque eorum bases L M, & A E producta occurrunt axi in O, & N: igitur vt demonstratum est, anguli à contingentibus verticalibus segmentorum similium L M, & A E cum axi communi B D eiusdem sectionis continebunt angulos*

Prop. 16. 17. huius

gulos æquales; ij verò anguli æquales ſunt angulis O, & N, cum baſes L M, & A E parallelæ ſint contingentibus verticalibus eorundem ſegmentorum; igitur anguli L O B, & A N B æquales ſunt inter ſe; & propterea duorum ſegmentorũ baſes L M, & A E parallelæ ſunt inter ſe.

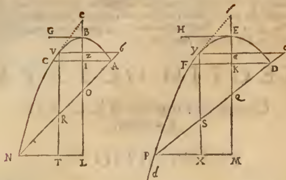
SECTIO OCTAVA

Continens Propoſit. XX. & XXI. Apollonij.

PROPOSITIO XX.

a SI in quibuslibet ſimilibus coniſectionibus A B C, & D E F ductæ fuerint ad axes B O, E Q ordinatim applicatæ A C, D F, N L, P M, quarum illæ, quæ ad eaſdem partes verticum B, & E ducuntur efficiant abſciſſas erectis proportionales, ſcilicet I B ad B G ſit, vt K E ad E H, nec non L B ad B G, vt M E ad E H: Dico ſegmenta facta ab ordinatis ſimiliter poſitis eſſe inter ſe ſimilia, ac ſimiliter poſita, ſcilicet N A ipſi P D, atque A B ipſi D E, nec non N B ipſi P E.

b Sintque primò ſectiones parabolæ; & educamus N A ad B L in O, & P D ad M E in Q. Et quia G B ad B I eſt, vt H E ad E K, & B L ad B G eſt vt M E ad E H; ergo L B ad B I, nempe L N ad I A potentia (19. ex 1.) nempe L N ad O I eandem proportionem habet, quàm M E 20.lib. 1.
ad E K,



ad E K, nempe P M ad D K potentia, nempe M Q ad Q K, & per conuersionem rationis O L ad L I erit, vt Q M ad M K: estque I L ad L B, vt K M ad M E; ergo O L ad L B est, vt Q M ad M E, & L B ad L N est, vt E M ad M P (propter similitudinem duarum sectionum) ergo ex æqualitate O L ad L N erit, vt Q M ad M P; suntque M, & L duo anguli recti; ergo N L O simile est P M Q; & per R, S semipartitiones ipsarum N A, D P ducamus ipsas T V, X Y parallelas duobus axibus, & ex duobus punctis V, Y, educamus perpendiculares V Z, Y *a* super duos axes. Et quia N O ad O A est, vt P Q ad Q D comparando antecedétes ad semisses differentiarum terminorum vel ad semisummas eorũ fiet N O ad R O, nempe N L ad L T, quæ est æqualis ipsi V Z, nempe L B ad B Z longitudine (*19. ex 1.*) vt P Q ad Q S, nempe P M ad X M æqualem ipsi Y *a*, nempe longitudine, vt M E ad E *a* (*19. ex 1*) igitur comparando differentias terminorum ad antecedentes, erit Z L ad L B, vt *a* M ad M E, & L B ad L O est, vt M E ad M Q; ergo ex æqualitate L Z ad L O, nempe N *b* ad N O est, vt M *a* ad M Q, nempe P *c* ad P Q erat autem prius N R ad N O, vt S P ad P Q, & comparando semisũmas, vel semidifferentias terminorum ad eorundem differentias O R ad R *b* erit, vt Q S ad S *c*, & R *b* ad R V est, vt S *c* ad S Y; quia duo triangula V R *b*, Y S *c* sunt similia; ergo R O ad R V eandem proportionem habet, quàm Q S ad S Y; sed tangens in V perueniens ad L O æqualis est O R, cui parallela est; quia eadit inter duas lineas parallelas; & similiter tangens in Y parallela est S Q, & ei æqualis; ergo V R abscissa ad tangentem est, vt abscissa S Y ad eius tangentem, & angulus Q æqualis est angulo O; igitur duo segmenta N V A, P Y D sunt similia (*16. ex 6.*) & pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmenta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita.

Defin. 2. c

d

20. lib. 1.

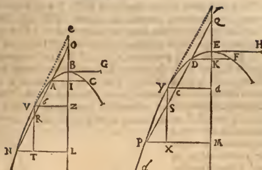
Ibidem. e

f

g

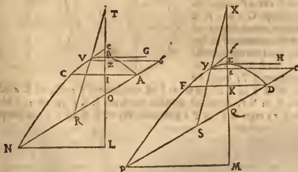
Deinde ponamus aliud segmentum P *d*. Dico non esse simile alicui prædictorum segmentorum, quia non absciunduntur à duabus ordinationibus vnius axis (*18. ex 6.*). Et hoc erat ostendendum. h

PROP.



PROPOSITIO XXI.

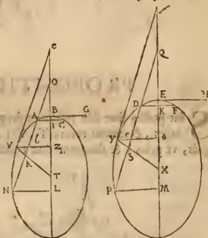
Sint postea duæ illæ ſectiones hyperbolicæ, & ellipticæ ſimiles, & earum centra T, X (remanentibus lineis, & ſignis, vt prius) & ducantur duæ contingentes V *e*, & Y *f*.

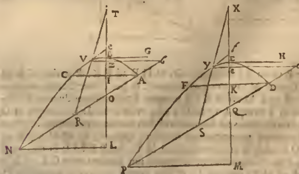


a Quoniam B G ad B I ſuppoſita eſt, vt H E ad E K, & pariter G B ad B L, vt H E ad E M; ergo ex æqualitate, & per conuerſionem rationis
b B L ad L I eſt vt E M ad M K; & propter ſimilitudinem duarum ſectionum N L ad A I nempe L O ad O I eſt, vt M P ad D K, nempe M Q ad Q K, & antecedentes ad ſummas vel differentias terminorum, ſcilicet Lem. 1. lib. 5.
c O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K, & ex æqualitate O L ad L B erit, vt Q M ad M E, ſed B L ad L N eſt, vt E M ad M P, cum ex ſuppoſitione ſectiones ſint ſimiles; ergo O L ad L N eſt, vt Q M ad M P; ſuntque L, M duo anguli recti: ergo anguli O, Q,

 nempe

nempe e, f sunt æquales: deinde ducantur V Z, Y a ad axes ordinatæ; ergo (propter similitudinem duarum sectionum) T Z in Z e ad quadratum Z V eandem proportionem habebit, quàm X a in a f ad quadratum
Propos. 6. præmiss. a Y, & angulus e æqualis est angulo f; igitur V e T simile est Y f X, & pariter O T R, Q X S; & propterea O e ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q f ad Y S, & propter similitudinem duarum sectionum B I ad I A est, vt E K ad K D, & A I ad I O, vt D K ad K Q propter
Lem. 1. lib. 5. similitudinem duorum triangulorum; ergo (ex æqualitate, & comparando antecedentes ad summas vel differentias terminorum) erit B I ad B O, vt E K ad E Q, sed B T ad B I erat, vt X E ad E K (propter similitudinem duarum sectionum) ergo ex æqualitate, & rursus comparando antecedẽtes ad
Ibidem. summas vel differentias terminorum B T ad T O erit, vt X E ad X Q, cumque T
37. lib. 1. Z in Z e ad quadratum V Z sit vt X a in a f ad quadratum a Y (39. ex 1.) & quadratum V Z ad quadratum Z e est, vt quadratum a Y ad quadratũ a f erit T Z in Z e, ad quadratũ Z e, nempe T Z ad Z e vt X a in a f ad quadratum a f nempe G a ad a f, & comparãdo antecedentes ad differnntias terminorũ in hyperbola, & ad eorum summas in ellipsi, fiet Z T ad T e, nẽpe quadratum B T (quod est
37. lib. 1. æquale ipsi Z T in T e (39 ex 1.) ad quadratnm T e est, vt X a ad X f, nempe a X in X f, quod est æquale quadrato E X (39. ex 1.) ad qua-
Ibidem. dratum X f; ergo B T ad T e potentia est, vt E X ad X f; & propterea

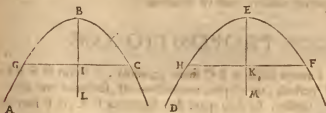




T B ad T *e* erit, vt E X ad X *f*; & iam oſtendimus, quod B T ad T O eſt, vt E X ad X Q; igitur ex æqualitate, & comparando terminorum differentias ad conſequentes erit O *e* ad *e* T, vt Q *f* ad *f* X; ſed T *e* ad *e* V eandem proportionem habet quàm X *f* ad *f* Y, eo quod oſtenſa ſunt ſimilia triangula V T *e*, Y X *f*; quare O *e* ad *e* V eſt vt Q *f* ad *f* Y; & iam oſtendimus, quod O *e* ad R V eandem proportionem habet, quàm Q *f* ad S Y; ergo R V ad V *e* eſt, vt S Y ad Y *f*, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur duo ſegmenta N V A, P Y D ſimilia ſunt inter ſe (17. ex 6.) & ſimiliter poſita. Inſuper dico, non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento; quia non abſcinduntur ab vna ordinatione, aut duabus, & earum diſtantia in ellipſi à centro non eſt æqualis (18. ex 6.), & hoc erat oſtendendum. Lem. 1. lib. 5.

PROPOSITIO XXII.

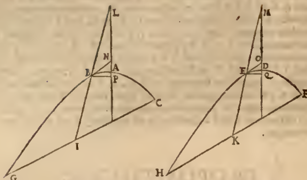
SEctionum non ſimilium A B C, D E F vnum ſegmentum vnius non eſt ſimile alicui ſegmento alterius.



Si enim hoc verum non eſt, ſit ſegmentum G C ſectionis A B C (ſi fieri poteſt) ſimile ipſi H F alterius ſectionis D E F, & iungamus G C, H F, eaſdẽq; bifariam ſecemus in I, K; iungamuſque L I, M K; quæ ſint duæ diametri, & ſecent ſegmenta in B, E: ſi itaque fuerint duo axes, cũ duo ſegmenta ſint ſimilia, vtique egrederentur in eorum ſingulis ordinationes ad duos axes, numero æquales, continentes cum axibus angulos rectos, & proportiones ordinationum ad ſua abſciſſa in qualibet earum eſſent eædem, ac abſciſſæ ad abſciſſas proportionales quoque eſſent. Et propterea duæ ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, ſed iam ſuppoſitæ fuerunt non ſimiles; quod eſt abſurdum. Si verò I L, M K non fuerint axes, educamus ex B, E ad duos axes L P, M Q duas perpendiculares B P, E Q, & duas tangentes B N, & E O: itaque (propter ſimilitudinẽ duorum ſegmentorum) ſimilia erunt B N L, E O M; & pariter L B P, M E Q; atque quadratum B P ad L B in P N, nempe in eadem proportione

44. lib. 2. Defin. 7. huius. Defin. 2. huius.

a b



37.lib. 1. tione figuræ diametri A L (40. ex 1.) erit vt quadratum E Q ad M Q in O Q, nempe in eadem proportione figuræ diametri D M (40. ex 1.)
Ibidem. quapropter duæ proportiones figurarum earundem sectionum sunt eædem inter se; & propterea duæ sectiones sunt similes (12. ex 6.) at suppositæ fuerunt non similes. Quod est absurdum.

PROPOSITIO XXIII.

SI autem sectio A B C fuerit parabola, & sectio D E F hy-
13. huius. perbola, aut ellipsis: manifestum est, sectiones non esse inter se similes. Et dico quod duo segmenta G C, H F non sunt similia.

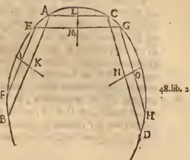
Si enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est im- a possibile, quemadmodum ostensum est in omnibus sectionibus ad propositionem 13. si vero vna earum fuerit hyperbole, altera verò ellipsis, idipsum ostensum est ad propositionem 14. Et hoc erat propositum.

PROPOSITIO XXIV.

CViuslibet conisectionis A C D portio B A C D non erit arcus circuli.

Si enim hoc verum non est educamus in illa chordas A B, C D, A C, quarum nulla alteri sit parallela: & educamus E F parallelam A B, & E G parallelam A C, atque G H parallelam C D, & per singularum duarum æquidistantium semipartitiones iungamus K I, L M, N O, quæ quidem

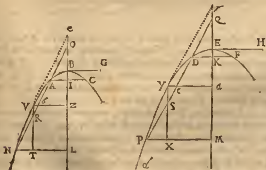
dem lineæ perpendiculares sunt ad prædictas chordas, suntque etiam diametri sectionis, ergo I K, L M, N O sunt axes, nec sibi in directum coincidunt; quia chordæ primo eductæ inter se parallelæ non erant: hoc autem est absurdum, quia in qualibet sectione reperiri non possunt plures, quàm duo axes (52. ex 2.); ergo fieri non potest, vt sectionis conicæ portio sit arcus circuli. Quod erat ostendendum.



48.lib. 2.

Notæ in Proposit. XX.

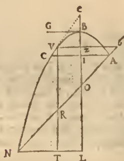
a QVodlibet duorum segmentorum, vt A B C, D E F in duobus segmentis similibus, vt N A C, P D F abscissa sint ab ordinatis duorum axium sectionum, vt A C, D F, N L, P M, A M, A S, K M ad latus suarum verticum vt B, E; sitque proportio earum abscissarum ad erecta duorum segmentorum eadem, nempe I B ad B G, vt K E ad E H, & L B ad B G, vt M E ad E H: vtique duo segmenta A B C, D E F, N B, P E similia sunt, & similia positione: &c. *Textus hic*

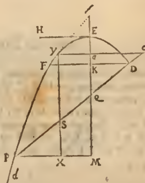


adeo corruptus est, vt ne Apollonius quidem, si reuiuisceret, sensum ex verbis tam inconcinnis, & non coherentibus elicere posset. Itaque diuinando eam esse veram lectionem censeo; quàm in textu apposui.

Educa-

Educamus itaque N A ad O ex B L, & P D ad Q ex M E, quia B G ad B I eſt, vt H E ad E K, & B G ad B L eſt vt H E ad E M; ergo L B ad B I, nempe L N ad A I (19. ex 1. (nempe L O ad O I eſt vt M E ad E K, nempe P M ad D K, nempe M Q ad Q K; & contra O L ad L I, vt V M ad M K, &c. *Addenda non nulla verba, quæ deficiunt, & reliqua restituenda censui, vt in textu leguntur. Quoniam B G ad B I eſt vt H E ad E K, & B L ad B G eſt vt M E ad E H; ergo, ex æqualitate, L B ad B I eandem proportionem habet, quam M E ad E K, ſed quadratum N L ad quadratum A I eſt in parabola, vt abſciſſa L B ad B I; pariterque quadratum P M ad quadratum D K eſt, vt M E ad E K: & propterea quadratum N L ad quadratum A I eandem proportionem habebit quam quadratum P M ad quadratum D K; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D* — 20. lib. 1. (margin) — b



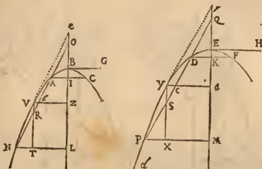


K; ſed vt N L ad A I ita eſt L O ad O I (propter parallelas A I, N L, & ſimilitudinem triangulorũ A I O, & O N L) pariterq; vt P M ad D K ita eſt M Q ad Q K (propter ſimilitudinem triangulorum Q M P, & Q K D) igitur L O ad O I eandem proportionem habebit, quàm M Q ad Q K; & comparando antecedentes ad differentias, vel ſummas terminorum O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K.

Et B L ad L N eſt vt E M ad M P (propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum) ergo ex æqualitate O L ad L N, &c. *Sequitur quidem hoc non propter ſimilitudinem ſegmentorum, quandoquidem ſegmenta ſimilia non ſupponuntur ſed quia ſemper parabolæ ſunt ſimiles, & in eis poſita ſunt axium abſciſſæ L B, & M E proportionales lateribus rectis B G, & E H, propterea (vt in prop. 11. huius oſtenſum eſt) B L ad L N eandem proportionem habebit quàm E M ad M P; ſed prius L B ad B I erat vt M E ad E K, ergo comparãdo differentias terminorum ad antecedentes erit I L ad L B vt K M ad M E, eſtq; oſtenſa O L ad L I vt Q M ad M K, ergo ex æquali ordinata O L ad L B erit vt Q M ad M E.* — C; 11. huius. (margin)

Et

d Et quia N O ad O A est vt P Q ad Q D inuertamus proportionem, deinde bifariam fecemus duas tertias partes, & inuertamus eas quoque, fiet N O ad O R, nempe N L ad L T in eadem ratione ipsi V Z, nempe L B ad B Z, vt D Q ad Q T, nempe P M ad P X æqualem ipsi Y a, nempe M E ad E a, &c. *Quoniam L O ad O I ostensa fuit vt M Q ad Q K, & propter parallelas I A, L N, nec non D K, M P est N O ad O A, vt L O ad O I; pariterq; P Q ad Q D est vt M Q ad Q K; igitur N O ad O A eandē proportionē habet, quàm P Q ad Q D, & comparando antecedentes ad semidifferentias, vel semisūmas terminorū erit N O ad R A, vt P Q ad S D: & pro-*



pterea N O ad O R summā, vel differentiā consequentium eandem proportionem habebit, quàm P Q ad Q S; sed propter parallelas R T, & O L est L N ad T L, vt N O ad O R; pariterque (propter parallelas S X, & Q M) est P M ad X M, vt P Q ad Q S; igitur N L ad L T eandem proportionem habet, quàm P M ad M X: suntque in parallelogrammis V L, & Y M latera opposita æqualia V Z ipsi T L, atque a Y ipsi X M; igitur N L ad V Z eandem proportionem habet, quàm P M ad Y a, & ita erunt earum quadrata; sed vt quadratū N L ad quadratum V Z ita est abscissa L B ad abscissam B Z, pariterque vt quadratum P M ad quadratum Y a, ita est abscissa M E ad abscissam E a; ergo L B ad B Z eandem proportionem habet, quàm M E ad E a. 20 lib.1.

e Et occurrere faciamus par pari remanet O R ad R b, vt Q S ad S c, &c. *Quoniam ostensa fuit O N ad O R, vt Q P ad Q S, per conuersionem rationis O N ad N R erit vt Q P ad P S, pariterque ostensa fuit b N ad N O, vt c P ad P Q; ergo ex æquali b N ad N R est vt c P ad S P, & diuidendo b R ad R N erit vt c S ad S P; sed erat inuertendo R N ad N O, vt S P ad P Q; quare comparando antecedentes ad differentias terminorum erit N R ad R O vt P S ad S Q: idcoq; rursus ex æqualitate b R ad R O erit vt c S ad S Q; estq; V R ad R b vt Y S ad S c (eo quod triangula V R b, & Y S c sunt similia triangulis similibus O N L, & Q M P propter æquidistantes) ergo ex æquali ordinata V R ad R O eandem proportionem habet, quàm Y S ad S Q.*

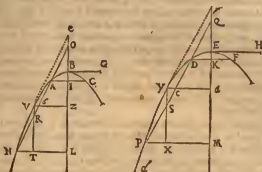
Sed tangens in V perueniens ad L O, &c. *Si enim ex punctis Y, V ducantur V c, & Y f tangentes parabolas, & producantur quousque secent axes in c, & f efficientur duo parallelogramma V c O R, & Y f Q S, in quibus tãgentes V c, & Y f efficientur æquales ipsis O R, & Q S: & propterea inuertendo R V abscissa ad contingentem V c æqualem ipsi R O eandem proportionem habebit, quàm abscissa S Y ad contingentem Y f æqualem ipsi S Q, atque efficiunt prædictæ contingentes cum axibus angulos c, f æquales ipsis O, & Q æqualibus propter parallelas; igitur segmenta N V A, & P Y D similia sunt inter se.* f

Prop. 16. huius.

Et pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmenta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita, &c. *Hoc manifestum est, si enim coniungantur rectæ lineæ N C, & P F, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, &c, vti fecimus in sectione N A, ostendetur similiter (ex eadem 16. propositione) segmenta N C, P F similia esse inter se. Non secus si coniungantur rectæ lineæ N B, & P E, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, & reliqua perficiantur, vt prius, ostendentur eodem modo, segmẽta N B, & P E similia inter se.* g

Deinde ponamus segmentũ P d; quia non abscindunt illa duæ ordinationes vnius axis (18. ex 6.), & hoc erat, &c. *Sed legendum puto vt in textu apparet. & horum verborũ sensus erit; fieri non potest, vt segmentũ P d sit simile ipsi N A, vel N B, propterea quod in sectione P F segmenta P d vni tantummodo portioni simile est (præter quàm in ellipsi), & ambo intercipi debent à duabus ordinatim applicatis ad axim E Q: & propterea segmenta P D, vel P E non erunt similia ipsi P d, & quia N A ostensum est simile P D, pariterque N B ostensum est simile P E; igitur segmentum P d simile non est, neque N A, neque segmento N B; quod erat ostendendum.* h

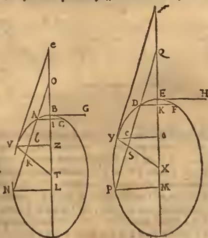
NOTE



Notæ in Proposit. XXI.

a QVoniam G B ad B I, ſuppoſita eſt vt H E ad E K, &c. *Quia L B ad B G ex hypotheſi erat, vt M E ad E H, & inuertendo G B ad B I erat vt H E ad E K; ergo ex æqualitate L B ad B I erit vt M E ad E K; & per conuerſionem rationis B L ad L I erit vt E M ad M K.*

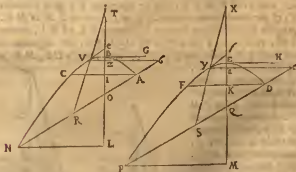
b Et propter ſimilitudinem duarum ſectionum N L ad A I, nempe L O ad O I eſt, vt P M ad F K, nempe M Q ad Q K, &c. *Quoniam duæ ſectiones N B, & P E ſimiles ſuppoſitæ ſunt, & axiũ abſciſſæ L B, M E; nec non I B, K E ad latera recta B G, & H E proportionales ſunt; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D K: & quia triangula N L O, & A I O ſimilia ſunt propter parallelas N L, & I A, pariterque triangula P M Q, & D K Q ſimilia ſunt; igitur L O ad O I erit vt N L ad I A; pariterque M Q ad Q K erit vt P M ad D K, ſeu vt N L ad A I: & propterea L O ad O I erit vt M Q ad Q K.* ex 12. huius.



c Et ex æqualitate L O ad L B erit vt Q M ad M E, ſed L B ad L N eſt vt M E ad M P, cum ex ſuppoſitione ſectiones ſint ſimiles, &c.

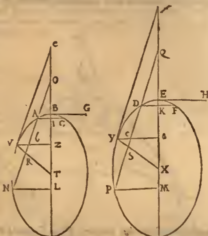
Quoniam O L ad L I oſtenſa fuit, vt Q M ad M K; atque prius oſtenſa fuit B L ad L I, vt E M ad M K; ergo inuertendo I L ad L B erit, vt K M ad M E; & propterea ex æqualitate O L ad L B erit vt Q M ad M E; ſed B L
ex 12. huius. *ad L N eſt, vt E M ad M P; igitur ex æqualitate O L ad L N erit vt Q M ad M P; ſuntque duo anguli L, & M recti; ergo triangula O L N, & Q M P æquiangula erunt; & propterea anguli O, & Q æquales inter ſe erunt; ſed quia contingentes verticales V e, & Y f parallelæ ſunt ordinatim applicatis N A, P D ad diametros V R, & Y S; igitur angulus V e B æqualis erit angulo N O L; pariterque angulus Y f E æqualis erit angulo P Q M; & propterea anguli e, & f æquales erunt inter ſe.*

Ergo propter ſimilitudinem duarum ſectionum T Z in Z *e* ad quadratum Z V eandem proportionem habebit quàm X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur V *e* T ſimile eſt Y *f* X, & pariter, &c. *Quoniam in ſectionibus ſimilibus V B, & Y E axes tranſuerſi* d
12. huius. *lateribus rectis proportionales ſunt, & ducta ſunt ad axes ordinatim applicatæ*
37. lib. 1. *V Z, Y a, & contingentes V e, Y f, eſtque rectangulum T Z e ad quadratum Z V, vt latus tranſuerſum ad rectum, pariterque rectangulum X a f ad quadratum a Y, vt axis tranſuerſus ad erectum; igitur rectangulũ T Z e ad quadratum Z V eandem proportionem habet, quàm rectangulum X a f ad quadratum a Y, & à verticibus V, Y duorum triangulorum V e T, & Y f X ducta ſunt ad baſes recta linea V Z, Y a efficientes angulos rectos, cum ordinatim*



applicata ſint ad axes; atque angulus V e Z oſtenſus eſt æqualis angulo Y f a,
Propoſ. 6. præmiſſ. *igitur tertius angulus Z V e æqualis erit tertio angulo a Y f; & ideo duo triãgula V T e, & Y X f ſimilia erunt inter ſe: & propterea circa angulos æquales T, & X latus e T ad T V eandem proportionem habebit, quàm f X ad X Y: cumque duæ contingentes verticales V e, Y f parallelæ ſint ordinatim applicatis N A, & P D ad diametros V R, Y S, erit O e ad R V, vt e T ad T V; pariterque Q f ad S Y erit, vt f X ad X Y: erat autem e T ad T V, vt f X ad*
12. huius. *X Y; igitur pariter O e ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q f ad S Y; ſed B I ad I A eſt, vt E K ad K D.*

c Sed B T ad B I erat vt X E ad E K propter ſimilitudinem duarum ſe-ctionum, &c. *Quoniam ex hypotheſi abſciſſa axis I B ad latus rectum B G erat vt abſciſſa K E ad latus rectum E H; & propter ſimilitudinem ſectionum latera erecta G B, & H E ad axes tranſuerſos, & ideo ad eorum ſemiſſes T B & E X eandem proportionem habebunt; ergo ex æquali I B ad B T erit vt K E ad E X, & inuertendo T B ad B I erit vt X E ad E K. Sed libet aliam expoſitionem afferre Apollonij principijs cõuenientiorẽ. Quia ex definitione 2. huius libri legitime interpretata, & ſicuti cõſtat ex 12. prop. huius. In ſectionibus ſimilibus non quælibet axium abſciſſæ ad conterminas potentiales habent eandem rationem; ſed illæ tantummodo, quæ figuræ lateribus proportionales ſunt: itaq; in ſectionibus ſimilibus A B, D E vt qualibet axium, abſciſſæ B I, E K ad conterminas potentiales I A, K D ſint proportionales, neceſſe eſt, vt eadem I B, & E K lateribus figurarum B T, E X proportionales ſint.* 12. huius.

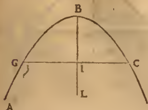


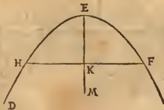
f Et quadratum V Z ad quadratum Z *e* eſt, vt quadratum *a* Y ad quadratum *a f*, &c. *Oſtenſa enim fuerunt duo triangula V Z* e, *& T* a f *ſimilia inter ſe; & ideo latera circa angulos rectos Z, &* a *proportionalia erunt; & pariter eorum quadrata.*

g Inſuper dico non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento, &c. *Sicuti in præcedenti propoſitione factum eſt oſtendetur, quod ſegmentum N C non eſt ſimile alicui alio ſegmento in altera ſectione P E, quando non comprehenduntur ab ordinatim ad axes applicatis, & in ellipſibus æqualiter à centris diſtant.*

Notæ in Propoſit. XXII.

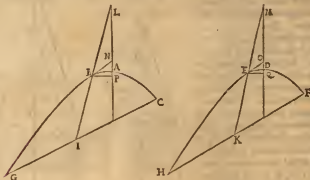
ET propterea duo ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, &c. *Quoniam ſegmenta G B C, & H E F poſita ſunt ſimilia, erunt diametrorum* Lem. 8. huius.





ex 11. 12. huius. *seu axium (in hoc casu) L B, & M E figuræ similes inter se; & ideò sectiones A B C, & D E F similes erunt.*

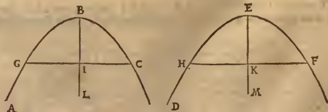
Itaque propter similitudinem duorum segmẽtorum simlia erunt B N L, E O M, & pariter L B P, & M E Q atque quadratum B P ad L P in P N nempe, &c. *Huius secundæ partis demonstrationem, quàm non sinceram Paraphrastes Arabicus nobis transmisit omittere operę pretium erit, eandemq; bre-* b



uius demonstrare hac ratione. Quia segmenta C B G, & F E H similia ponuntur; ergo erunt figuræ diametrorum B I, E K similes inter se in angulis I, K Lem. 8. huius. *æqualibus, & sectiones ipsæ C B G, & F E H similes inter se erunt; quod est* Prop. 15. huius. *contra hypothesin.*

Notæ in Proposit. XXIII.

SI enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est impossibile, &c. *Si enim concedantur segmenta G B C in parabola, & H E* a Defin. 7. huius. *F in hyperbole, vel ellipsi, similia inter se; igitur in vnaquaque earũ duci possent ad diametros ordinatim applicata numero æquales, efficientes angulos æqua-*



les

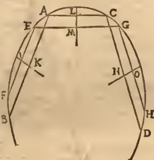
les cum diametris, quæ abscissis sint proportionales, & abscissæ quoque inter se. Vnde sequitur, quod portiones eiusdem diametri E K à centro M ad omnes ordinatim ad diametros applicatas sint æquales inter se, vt ostensum est in propositione 13. huius: quod est impossibile.

Quando verò sectio A C est hyperbole, ac sectio D F est ellipsis, similiter, vt in 14. propositione huius, ostendetur: quo abscissa in hyperbola, & ellipsi sint proportionales; & propterea omnes habebunt rationes maioris inæqualitatis, aut omnes habebunt proportiones inæqualitatis minoris, quod tamen in prædicta 14. propositione impossibile esse ostenditur.

Notæ in Proposit. XXIV.

a SI enim hoc verum non est, &c. *Quod qualibet portio B A D sectionis conicæ A B G nullo pacto circumferentia circuli esse possit sic ostendetur.*

Quia in circulo rectæ lineæ diuidentes bifariam duas parallelas inter se sunt necessariò diametri circuli, qui perpendiculariter secant prædictas parallelas applicatas; igitur si curua linea B G D fuerit circuli peripheria rectæ lineæ K I, L M, & N O diametri circuli, erunt perpendiculares ad ordinatim applicatas æquidistantes inter se; sed quia etiam A B G supponitur sectio conica, erunt K I, L M, N O axes prædictæ sectionis conicæ eo quod bifariam, & ad angulos rectos diuidunt ordinatim applicatas. Rursus quia prædictæ ordinatim applicatæ non sunt omnes inter se parallelæ, eo quod ex constructione applicatæ A B, A C, C D non fuerunt ductæ æquidistantes; igitur tres axes I K, L M, N O indirectum non coincidunt; quare in sectione conica B A G reperiri possent tres axes; quod est impossibile. 48. lib. 2.



SECTIO NONA

Continens Proposit. XXV.

b SI duo plana æquidistantia conum aliquem secuerint, atque in eo efficiant duas hyperbolas, aut ellipses; vtique sectiones similes inter se erunt, sed non erunt necessariò æquales.

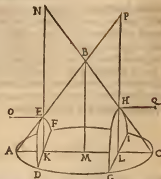
Efficiant

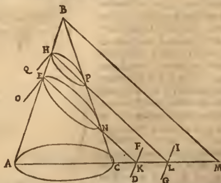
Efficiant duo plana parallela D E N F, G H P I in basim coni A C duas rectas lineas D F, G I, & planum per axim coni ductum efficiat triangulum A B C perpendiculare ad duo illa plana parallela; quæ ab illo secentur in E K, H L. Erunt D F, I G perpendiculares ad A C, & educamus B M parallelam ipsis E K, H L; & vt quadratum B M ad A M in M C; ita ponatur N E ad E O, & ita P H fiat ad H Q, erunt N E, P H inclinata duarũ sectionũ F E D, I H G, aut eorum transuersæ; igitur O E, H Q erunt eorum erecta, & propterea figuræ duarum sectionũ sunt similes; igitur duæ sectiones similes sunt. Et si quidem fuerint N E, P H æquales; ipsæ quoque æquales erunt, alias non; Et hoc erat propositum. b

12. 13. lib. 1.

12. huius.

2. & 10. huius.





Notæ in Proposit. XXV.

SI abscindant conum aliquem duo plana parallela prouenient duæ sectiones hyperbolicæ, vel quia duæ sectiones sunt similes, &c. *Quæ, immutanda censui vt in textu videre est.* a

Sint abscissiones duorum planorum æquidistantium cum basi I G, F D, & secet conum planum transiens per eius axim, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, quæ expositionem perficiunt. Animaduertendum est, hanc propositionem conuertibilem non esse; licet enim plana parallela in eodem cono efficiant sectiones similes, verum non est, quod quotiescunque in eodem cono duæ* b

sectiones

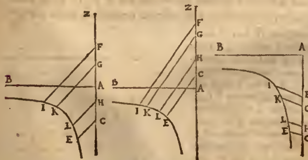
ſectiones ſunt æquales, vel ſimiles inter ſe, tunc quidem earum plana ſunt æquidiſtantia: Sicuti enim in eodem cono ſcaleno deſignari poſſunt circuli æquales ſubcontrariè poſiti, ſic etiam reliquæ coniſectiones ſubcontrariè conſtituta effici poſſunt æquales, & ſimiles inter ſe: hæc autem, ſicuti etiam quamplurima videri poſſunt in libris neotericorum.

Sed non alienum erit à noſtro inſtituto hic paucis conſiderare paſſiones, & deſcriptiones ſectionum conicarum ſimilium, vel æqualium, quæ æquidiſtantes, ſeu aſymptoticæ vocantur. Et licet hæ ab alijs inuentæ, & traditæ ſint, non nulla tamen noua in medium afferam: non enim rerum nouitas ex ſubiecti nouitate tantummodò arguitur, imo de ſubiecto antiquo poſſunt noua ſpeculationes afferri, atque corrigi, & cõpleri ea, quæ apicem perfectionis non attingunt, & hæc quidem omnia noua dici poterunt, & poſſunt, & debent zelo veritatis euulgari, nec propterea prædeceſſorum nominibus, aut inuentionibus iniuria infertur.

Primus itaque omnium (quod ſciam) Pappus Alexandrinus libro ſeptimo collectionum Mathematicarum propoſitione 208. *lemmate ſexto in quintum librum Apollonij, conſiderauit concentricas hyperbolas inter ſe ſimiles, eundẽ axim habentes, ad eaſdem partes cauas inter ſe ſe non concurrere, ſed ſemper ad ſe ipſas vicinius accedere. Poſtea Gregorius à Santo Vincentio oſtendit, quod duæ parabolæ inter ſe æquales, ſimiliter poſitæ circa communem axim, vel diametrum, pariter nunquàm conueniunt, & parallelæ ſunt inter ſe, & in infinitum productæ ſemper magis ad inuicem accedunt; atque propoſit.* 139. *de Hyperbola conſiderauit duas hyperbolas æquales, & ſimiles, quæ pariter in infinitũ extenſæ nunquàm conueniunt, & ſimul cum Pappo putat, rite concludi poſſe, quod prædictæ ſectiones, in infinitum extenſæ, ſint aſymptoti, & ſemper magis, ac magis ad inuicem appropinquentur ex eo, quod rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes inter duas ſectiones intercepta, ſucceſſiuè ſemper diminuantur. Propoſitiones quidem reconditæ, & ſcitu iucundæ, ſed an æquè certæ, & indubitatæ cenſeri debeant, inquiremus, aliquibus tamen præmiſſis.* Parab. pr. 344.

DEFINITIO Addita.

In qualibet hyperbola I E, cuius aſymptoti C A B, duarum rectarum linea-

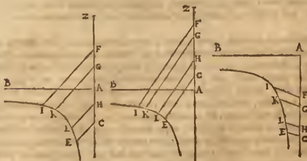


rum F I, G K inter ſe æquidiſtantium, ab vna aſymptoto A C ad hyperbolen eductarum, ſit F I propinquior centro, quàm G K, quando ambo cadunt infra centrum A ad partes C; vel F I magis à centro recedat, quando ambo cadunt

 vltra

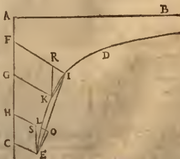
vltra centrum in eadem asymptoti productione A Z; aut F I supra, & G K infra centrum A existat: In quolibet casu dicetur, F I vlterius tendere ad partes centri, vel asymptoti A B, quàm G K.

Non secus si ab eadem asymptoto A C educantur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes F I, G K, H L, C E, quarum duæ priores F I, G K, centro propinquiores sint, quando omnes infra centrum A collocantur; vel magis à centro recedant, quando omnes in productione A Z existunt; aut certe duæ F I, G K supra centrum, & H L, C E infra centrum existant: Tunc similiter in quolibet casu dicentur rectæ lineæ F I, G K vlterius tendere ad partes centri, & asymptoti A B, quàm duæ aliæ H L, C E.



PROP. 2. Addit. *Si in vna asymptoto A C, hyperboles D E sumantur duo segmenta æqualia F G, H C, & à punctis diuisionum ducantur quatuor rectæ lineæ F I, G K, H L, C E parallelæ inter se, vsque ad hyperbolen: Dico quod differentia duarum æquidistantium F I, G K ad partes centri, & alterius asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit differentia reliquarum H L, C E.*

Ducantur à punctis E, K rectæ lineæ E S, K R parallelæ asymptoto A C, quæ efficiant parallelogrãma C S, G R. Patet I R esse differentiam æquidistantium F I, & G K; pariterque L S esse differentiam æquidistantium H L, C E; & coniungantur rectæ lineæ E I, & K I, ducaturque E O parallela I K, secans H L in O. Et quia recta linea E I cadit intra curuam sectionem conicam E K I, & punctum K eiusdem conicæ sectionis



inter

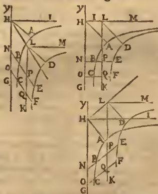
inter E, & I existit; ergo recta linea I K posita intra conicū segmentum E K I supra eius basim E I cadit; & ideo ei parallela E O cadit infra eandem segmenti conici basim E I, & propterea occurret ipsi H L intra conisectionem, & infra punctum L in sectione positum, vt in O; & ideo O S maior erit, quàm S L. Et quoniam S E, & R K sunt inter se parallelæ (quia eidem A C æquidistant) pariterque E O, & K I factæ sunt parallelæ, atque S O, & R I (ex hypothesi) æquidistantes erant; igitur duo triangula E S O, & K R I similia sunt inter se, & eorū latera homologa E S, & K R æqualia sunt inter se (quia in parallelogrāmis C S, & G R latera E S, R K æqualia sunt oppositis C H, G F inter se æqualibus, ex hypothesi) igitur reliqua latera homologa S O, & R I æqualia sunt inter se; & propterea R I differentia æquidistantium F I, G K ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit, quàm S L, quæ portio est ipsius S O, & est differentia æquidistantium H L, & C E alterius segmenti H C. Quod erat ostendendum.

Ex constructione, & demonstratione huius propositionis colligitur, quod si à duobus punctis eiusdem asymptoti A C ad hyperbolen ducantur duæ rectæ lineæ inter se parallelæ; illa, quæ ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendit, maior est reliqua. Nam recta linea K R, asymptoto A C parallela cadit extra sectionem, & ideo secat interceptam parallelam F I, quæ erit maior, quàm F R, seu G K; igitur F I ad partes centri A vlterius tendens maior est qualibet alia parallela G K ad partes oppositas tendente. Eadem ratione F I maior erit quàm H L, & H L maior, quàm C E. Vnde patet propositum. COROL LAR.

Si fuerint duæ hyperbolæ A B, & D E æquales, & similes ad easdem partes cauæ, quarum centra H, & L, & asymptoti G H I, & K L M, nec non axes A H, & D L sint parallelæ inter se, & rectæ lineæ B E, & C F ab hyperbolis interceptæ parallelæ fuerint rectæ H L centra coniungenti; erunt B E, & C F æquales ipsi H L, & inter se. PROP. 3. Addit.

Si autem parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H contentum à recta linea L H centra coniungente, & interiore asymptoto L K, in qua B E, & C F positæ sunt: Dico B E vlterius tendentem ad partes reliquæ asymptoti L M maiorem esse, quàm C F.

Si vero B E, & C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ H g diuidenti angulum L H G à recta linea L H centra coniungente, & eadem asymptoto H G contentum: Dico B E vlterius tendentē ad partes reliquæ asymptoti H I minorem esse, quàm C F.



 Recta

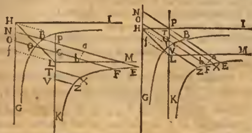
Rectæ lineæ parallelæ B E, C F secent æquidistantes asymptotos H G, L K in punctis N, O, P, Q. Debent autem consectiones in eodem plano collocari sicuti aliæ omnes, quæ in sequentibus propositionibus 4. 5. 6. 7. 8. & 9. vsurpantur semper in vno plano positæ intelligi debent.

Et primo duæ rectæ B E, C F parallelæ sint rectæ lineæ H L centra coniungenti. Quoniam hyperbolæ A B, D E æquales sunt, & congruentes; atque æquidistantes asymptoti H N, L P æque inclinantur ad æquales semiaxes transuersos H A, & L D; & segmenta asymptotorum H N, L P æqualia sunt in parallelogrammo H P, nec non duo anguli H N B, & L P E æquales sunt inter se, propter parallelas asymptotos: igitur duæ figuræ A H N B A, & D L P E D æquales erunt, & congruentes: quapropter interposita recta linea N B & P E congruẽtes, & æquales erunt; & addita vel ablata communi B P, erit N P æqualis B E: est verò N P æqualis H L, eo quod H P parallelogrammum est; igitur intercepta B E æqualis est recta linea H L centra coniungenti. Eadem ratione qualibet alia intercepta C F parallela ipsi H L eidem æqualis ostendetur: quapropter duæ interceptæ æquidistantes B E, & C F inter se æquales erunt.

Secundo B E, C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H; ideoque P L f N, & Q L f O parallelogramma erunt: secetur L T æqualis H N, atque L V æqualis H O; ducanturque T X, V Z parallelæ ipsis N B, O C secantes reliquam hyperbolen in X, Z; eritque (vt in prima parte ostensum est) T X æqualis N B, atque V Z æqualis O C. Et siquidem B E, C F cadunt infra centra H, L ad partes G, K, cadent quoque infra L f eis parallelam per L ductam infra centrum H incidentem, & ideo N f, seu ei æqualis P L in parallelogrãmo P f minor erit, quàm H N; estque L T æqualis H N; igitur L P minor erit, quàm L T; & propterea punctum P propinquius erit centro L, quàm T: Eadem ratione ostendetur, quod punctum Q propinquius sit centro L, quàm V, & P propinquius centro quàm Q; ergo quatuor æquidistantium P E, Q F, T X, V Z cadentium infra centrum ad partes K, duæ P E, T X vlterius ad partes centri, vel asymptoti L M tendunt, quàm duæ Q F, V Z. At si B E, C F secent rectã lineam centra coniungentem inter duo centra H, & L, manifestum est puncta P, & Q cadere supra centrum L, atque duo puncta N, & O cadere infra centrum H alterius hyperboles, cumque L T secta sit æqualis ipsi H N ad easdem partes; pariterque L V æqualis ipsi Def. add

H O

H O cadent puncta T, & V infra centrum L; & P vlterius tendit quàm Q ad partes eiusdem centri L. igitur in tali casu quatuor æquidistantium duæ P E, T X vlterius tendent ad partes centri, & asymptoti L M, quàm duæ aliæ æquidistantes Q F, V Z. Quando verò B E, & C F cadunt vltra centra H, & L in productionibus æquidistantium asymptotorum G H, K L: quia N P cadit Def. add.

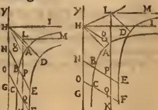


supra, & L f infra centrũ H, ergo in parallelogrammo P f recta N f, seu ei æqualis L P maior erit quàm N H: facta autem fuit L T æqualis H N; igitur L T minor est, quàm L P; Eadem ratione L V minor erit, quàm L Q, atque P vlterius tendit quàm Q ad partes centri L, & ab ijsdem punctis cadentibus supra centrum L in productione asymptoti K L ducuntur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes vsque ad hyperbolen D Z; igitur duæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, vel asymptoti L M, quàm duæ Q F, V Z. Ibidem. *Secetur postea P a æqualis N B, atque Q b æqualis O C. Et quia T X æqualis ostensa fuit N B erit P a æqualis ipsi T X; estque P E maior quàm T X;* Coroll. Propos. 2. addit. *propterea quod illa vlterius tendit ad partes cẽtri L, quàm T X; igitur P E maior erit, quàm P a, & earum differentia erit E a. Simili modo ostendetur Q b æqualis V Z, & minor quàm Q F, quarum differentia F b: cumque Q P æqualis sit ipsi N O, propterea quod sunt latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur T V, quæ ostensa fuit æqualis O N erit quoque æqualis Q P, & sũpta communiter Q T erit Q V æqualis T P, atque à terminis æqualium segmentorum eiusdem asymptoti L K ducuntur vsque ad hyperbolen E Z quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes, & earum bina P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, & asymptoti L M, quàm bina Q F, V Z; igitur differentia* Propos. 2. addit. *priorum, scilicet E a maior erit posteriorum differentia F b; estque B a æqualis N P, propterea quod æqualibus N B, & P a ponitur communiter B P; pariterque O Q æqualis est C b; suntque N P, & O Q æquales inter se, nempe latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur B a, & C b æquales sunt inter se: ijs verò adduntur excessus inæquales E a, F b efficietur E B vlterius tendens ad partes asymptoti H I maior, quàm F C. Quod erat primum.*

Tertio ijsdem positis N E, O F sint parallelæ alicui rectæ lineæ H g diuidẽti angulum L H G, & propterea extensæ productionem asymptoti M L secabunt,

&

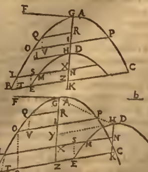
& parallelæ erunt alicui rectæ lineæ ex L Y diuidenti angulum H L M, eo quod parallela erãt rectæ H G diuidenti angulum L H G, & prius B E vlterius, quàm C F tendebat ad partes asymptoti H I; ergo è contra C F vlterius tendet ad partes asymptoti H G, & educũtur ab asymptoto L M producta, & parallelæ sunt rectæ lineæ ex L diuidenti angulũ H L M, contentum à recta linea centra coniungente, & asymptoto M L, in qua illa eadunt; igitur (ex prima parte huius propositionis) C F maior erit, quàm B E; & è contra B E vlterius tendens ad partes asymptoti H I, minor erit, quã C F; vt propositum fuerat.



PROP. 4. Addit. *Sint duæ æquales parabolæ A B, D E ad easdem partes cauæ, quarum diametri G I, H K sint congruentes aut parallelæ inter se, nec nõ ad eas ordinatim applicatæ B Z K, L X N sint parallelæ alicui rectæ diuidenti angulum G H K à recta linea G H vertices coniungenti, & diametro H K interioris sectionis D H contentum, si diametri congruentes non fuerint. Dico quod, B E, L M portiones applicatarum à sectionibus ad easdem partes interceptæ, semper magis diminuentur, quo magis à verticibus recedunt; efficienturque minores quacumque recta linea proposita, si diametri sunt congruentes: si verò sunt parallelæ nunquam minores erunt portione ordinatæ inter diametros intercepta. At si parallelæ fuerint alicui rectæ lineæ diuidenti angulum H G I à recta G H, & diametro I G exterioris sectionis A G contentum, semper magis augentur, sed erunt semper minores ea quæ à diametris intercipitur. Vel si fuerint parallelæ diametris non congruentibus, semper magis augentur, quo magis à concursu recedunt.*

Sit F G latus rectum diametri G I in parabola G B, ordinatim applicatæ B E K, & L M N secent diametrum G I in X, Z, & diametrum H K in N, K, & secetur abscissa G I æqualis H K, & G R æqualis H N; ideoque R I æqualis erit N K, seu X Z (propterea quod in parallelogrammo N Z opposita latera æqualia sunt) ducanturque ordinatæ O I, Q R, quæ erunt æquales, & congruentes ipsis E K, M N propter æqualitatem sectionum, & abscissarũ similium diametrorum; ducanturque à punctis E, L, Q rectæ lineæ E S, L T, Q V parallelæ diametris occurrentes ipsis B E, & O I in S, T, V: manifestum est S M

ex 10. ex 21. huius.



aqua-

æqualem esse O V, eo quod in parallelogrammis Q I, & S K latera opposita sunt æqualia, & ipsa ordinata E K O I; nec non M N, Q R æquales ostensæ sunt: Deinde producantur, B E, O I ad sectionem in C, P; Et quia differentia quadratorum B Z, L X, seu T Z, idest rectangulum B T C æquale est differentia rectangulorum Z G F, & X G F seu rectangulo sub abscissarum differentia X Z, & latere recto G F. Simili modo rectangulum O V P æquale erit rectangulo sub abscissarum differentia R I, & latere recto G F: suntque rectangula contenta sub X Z, G F, & sub R I, G F æqualia, propterea quod latera X Z, R I æqualia ostensa sunt, & latus rectum G F est commune; igitur rectangula B T C, & O V P æqualia sunt; ideoque vt T C ad V P, ita reciprocè erit O V ad B T. Et primò quia diametri G Z, H K coincidunt, & parabola H D comprahenditur ab A G; erit G Z maior quàm H K, seu quàm G I, & B Z maior quàm E K, & L X quàm M N. Si verò B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ lineæ H Y diuidenti angulum G H K; ergo Y Z, seu ei æqualis H K, vel G I minor erit, quàm G Z. Eadem ratione G X maior erit, quàm G R; quare ordinatim applicata B Z maior erit, quàm O I, & Z C maior, quàm I P; pariterque L X, seu T Z maior erit, quàm Q R, seu V I; ideoque T C maior erit, quàm V P: erat autem O V ad B T reciprocè, vt T C ad V P; ergo O V, seu ei æqualis S M maior erit, quàm B T: ijs verò addantur æquales L S, T E, quæ in parallelogrammo S T sunt latera opposita, igitur L M, maior erit quàm B E. ex 11. lib. 1.

Deinde quando diametri G I, H K sibi mutuo congruunt sit b *minor qualibet data recta linea, & à vertice H ducatur H* d *cuius quadratũ æquale sit rectangulo H G F, & fiat vt* b *ad H* d, *ita H* d *ad aliam rectam lineam æqualem C E; atq; vt H* d *ad semissem sũmæ C E, &* b *potentia, ita fiat longitudine H G ad G K, ducaturque B K C ordinatim applicata ad diametrum G I. Quoniam quadratum E K æquale est parallelogrammo H K, G F (propterea quod parabolæ sunt æquales, & diametri similes) & ijs adduntur inter se æqualia quadratum* d *H, & rectangulum H G F, erunt duo quadrata E K, &* d *H simul sumpta æqualia rectãgulo K G F, seu quadrato B Z; quare differentia quadratorũ B K, & E K, idest rectanguli B E C æqualis erit quadrato* d *H; & propterea* d *H media proportionalis est inter C E, B E, sed facta fuit media proportionalis inter C E, &* b; *Ergo B E æqualis est* b; *ideoque B E minor est qualibet recta linea data. Quando verò diametri G Z, H K sunt æquidistantes, ijsdem positis ducatur O* n *parallela diametris secans B E in* n. *Quia* n *Z est æqualis O I, & erat E K æqualis O I, ergo* n *Z, & E K æquales sunt, & addita, vel ablata communi Z E erit* n *E æqualis Z K; & propterea qualibet intercepta B E maior erit in secundo casu, & minor in tertio, quàm* n *E, seu Z K à diametris comprahensa.* 11. lib. 1.

Tertio quando B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ G a *diuidenti angulum H G I, erit K* a, *seu ei æqualis G Z minor, quàm H K, seu quàm G I, atq; vt prius rectangula B T C, & O V P æqualia erunt, & eorum latera reciprocè proportionalia, estque S M æqualis minori O V, ergo S M minor erit quàm B T; & additis æqualibus L S, & T E, erit L M minor quàm B E.*

Tandem sint intercepta B E, L M parallelæ G V, H C portionibus interceptarum diametrorum non congruentium, & à terminis B, E, L, M, ducantur ad diametros ordinatim applicatæ, eas secantes in Z, K, I, N, O, S, & sectiones in P, & R; & cadat B E inter duas diametros. Quoniam punctum B cadit

B cadit inter verticem G, & punctum C eiuſdem parabolæ G C; igitur Z B K ordinatim applicata ad diametrum G I neceſſario ſecabit diametrum G I intra ſectionem in Z, & producta occurret K N extra eandem in K. Non ſecus oſtendetur, quod E N I ordinatim applicata ad diametrum H N, punctum N cadit intra, & I extra eandem ſectionem H E, & propterea recta C H minor erit, quàm K N, ſeu B E ei æqualis in parallelogrammo E K; pariterque Z I, ſeu ei æqualis B E minor erit, quàm G V. Cadat poſtea L M extra duas diametros ad eaſdem partes. Quoniam in parallelogrammo L S latera L O, M S æqualia ſunt; eſtque S R maior quàm M S, ſeu quàm O L; ergo (vt in prima parte huius propoſitionis oſtenſum eſt) rectangulum M S R, ſeu rectangulum ſub S V, & latere recto G F maius erit quadrato L O, ſeu rectãgulo O G F, & propterea S V maior erit, quàm O G, & addita communi O V; erit O S, ſeu ei æqualis L M, in parallelogrammo L S, maior quàm G V. Quod erat oſtendendum.

11. lib. 1.

SCHOLIVM.

Idem omnino verificari in ellipſibus demonſtrari facile poſſet, quod breuitati ſtudens libens omitto.

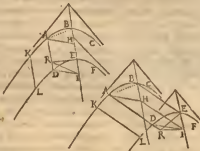
PROP. 5. Addit.

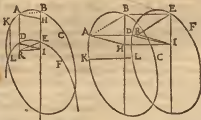
Si fuerint duæ quælibet coniſectiones A B C, D E F æquales, & ſimiles ad eaſdemque partes cauæ, quarum diametri B H, E I (æquè inclinatæ ad ordinatim ad eas applicatas) æquidiſtantes ſint inter ſe, vel congruentes; & ducantur quælibet rectæ lineæ A D, K L à ſectionibus interceptæ, parallelæ rectæ lineæ B E vertices coniungenti: erunt illæ æquales inter ſe.

Si enim hoc verum non eſt, ſit A D ſi fieri poteſt maior, aut minor, quàm B E, & ſecetur A R æqualis B E: patet punctum R cadere intra, aut extra ſectionem D E (ſed in eius plano cum ſectiones in eodem plano exiſtant) iunganturque recta linea A B, E R, quæ æquales erunt, & parallelæ inter ſe, cum ſint coniungentes æqualium, & æquidiſtantium B E, & A R. Poſtea ducatur A H ordinatim applicata ad diametrum B H efficiens abſciſſam H B; ſeceturque abſciſſa E I in altera ſectione æqualis B H; iunganturque H I, I D, & I R. Et quoniam B H,

E I

E I sunt aequales, & parallelae; ergo H I aequalis erit, & parallela ipsi B E (vel quia additur communis H E, vel propter parallelogrammum B I) sed prius A R aequalis erat, & parallela eidem B E; igitur A R, & H I aequales sunt inter se, & aequidistantes; ideoque coniungentes A H, R I erunt aequales, & parallelae; suntque anguli A H B, & R I E aequales inter se, cum ab aequalibus lateribus in triangulis A B H, & R E I aequilateris inter se contineantur; ergo R I ordinatim quoque applicata est ad diametrum E I; atque in sectionibus aequalibus abscissa B H, E I diametrorum similium, scilicet aeque inclinatarum ad suas ordinatas aequales sunt inter se; nec non ordinatae A H, I R aequales sunt ostensae; igitur sicut punctum A in sectione A B cadit, ita punctum R in sectione E D existit; sed positum fuit intra, aut extra ipsam, quod est absurdũ: Non igitur recta linea A D maior, aut minor esse potest, quàm B E; ideoque ei quaelibet alia intercepta K L aequalis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur aequidistans ipsi B E eidem aequalis; quapropter interceptae A D, K L, & B E aequales erunt inter se: Quod erat ostendendum. ex 10. huius.

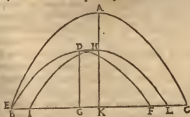




SCHOLIVM.

Si duae parabolae B A C, F D E aequales ad easdem partes cauae, constitutae fuerint circa axes A K, D G aequidistantes, & non congruentes se mutuo secabunt.

Ex vertice D axis G D ducatur D H perpendicularis ad axim A K, eum secans in H, & describatur alia parabola I H L aequalis prioribus B A, vel E D, cuius axis sit K H, & vertex H, & sicuti in propositione 4. additarum factum est, reperiatur B F C ordinatim ad axes applicata secans parabolas in E, B, I, & axes in G, K, ita vt intercepta B I aequalis sit D H, seu G K, quae in parallelogrammo D K ei aequalis est. Quoniã parabolae E D, & I H aequa-



ex prop. 1. huius. *les sunt, & axium abscissa D G, H K æquales cum sint latera opposita parallelogrammi D K; ergo ordinatim ad axes applicatæ E G, & I K æquales sunt, & ablata communi I G, erit E I æqualis G K, seu D H; erat autem intercepta B I æqualis eidem D H; igitur B I erit æqualis E I; & propterea punctum E*

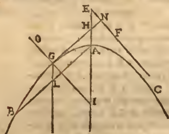
Maurol. 27. lib. 5. Conic. *parabolæ E D F cadet super punctum B parabolæ B A C; ergo duæ parabolæ B A C, & E D F conueniunt in vno puncto, & in eo se mutuo tangere non possunt; igitur se mutuo secant. Quare patet propositum.*

His demonstratis manifestè percipitur, quod ex successiua diminutione rectarũ æquidistantium, inter conisectiones interceptarum, deduci non potest, conisectiones magis ad se ipsas propius accedere; propterea quod in ijsdem sectionibus asymptoticis duci possunt intercepta recta lineæ inter se æquidistantes, quæ sint omnes æquales inter se, nimirum illæ, quæ parallelæ sunt alicui communi diametro, vel rectæ lineæ vertices earum coniungenti, vt in propositione 5. additarũ ostensum est. Similiter aliæ interceptæ rectæ lineæ, inter se æquidistantes successiuè augentur aliæ verò successiuè diminuuntur versus easdem partes, vt in propositione 3. & 4. addit. ostensum est. Et hoc nedũ verificatur in sectionibus non congruentibus, & asymptoticis, sed etiã in duabus æqualibus, & inter se similibus sectionibus se mutuo secantibus, dummodo earum axes paralleli sint, in ÿs enim interceptæ rectæ lineæ inter se æquidistantes, tendentes ad easdem partes, etiam illæ, quæ proprius ad punctum occursus sectionum conicarum accedunt, possunt diminui, pariterque inter se æquales esse, & quod mirum est possunt semper magis augeri. Si igitur æquidistantes interceptæ sunt mensura distantiarũ duarum sectionum, eadem conisectiones censeri debent modo parallelæ, & æqualibus interuallis inter se distantes, modo ad easdem partes stringi, & coangustari, & simul dilatari magis, ac magis, quod omnino videtur absurdum. Non igitur ex eo quod omnes interceptæ rectæ lineæ inter se æquidistantes sunt æquales inter se; propterea sectiones ipsæ erunt parallelæ, & asymptoticæ, & semper æquali interuallo ad inuicem separatæ; neque ex eo quod prædictæ parallelæ magis augẽtur, vel diminuuntur interualla augeri, vel stringi censendum est.

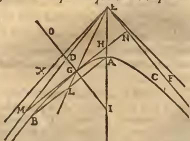
Et præcipuè præstantissimus Gregorius à Sancto Vincentio nescio an iure demonstrationem propositionis 14. libri 2. ipsiusmet Apollonij insufficientem reputauerit, propterea quod Apollonius deduxit rectas lineas hyperbolen comprahendẽtes, quæ asymptoti vocantur semper magis, ac magis sectioni viciniores fieri ex eo quod rectæ lineæ inter se æquidistãtes, interceptæ inter rectas asymptotos vocatas, & hyperbolen contentam successiuè semper magis, ac magis diminuantur; & è contra asseruit cum Cardano, & quodam Rabino Mose distantiam hyperbolæ à rectis asymptotis sumi debere, non à quibuscunque rectis lineis interceptis inter se parallelis, sed tantummodo à rectis lineis perpendicularibus ad asymptotos, quæ solummodo, inquiunt ipsi, distantias determinant; at reuera hæc animaduersio non videtur necessaria: perinde enim est considerare rectas lineas ab hyperbole ad vnam rectam lineam continentium ductas, quæ efficiat cum illa angulos æquales, ac si perpendiculares essent ad eandem: at quando rectæ lineæ interceptæ sunt inter se æquidistantes, tunc omnes efficiunt super rectam lineam continentem hyperbolen angulos æquales ad easdem partes; & propterea (ex inæqualitate prædictarum æquidistantium) optimè concluditur cum Apollonio inæqualitas perpendicularium, seu distantiarum. Quando verò considerantur duæ lineæ curuæ veluti sunt duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ, vel ellipses, tunc quidem

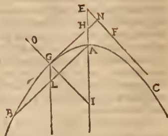
dem nulla ratione rectæ lineæ inter se æquidistantes, inter curuas interceptæ determinare possunt prædictarum curuarum distantias; quandoquidem inæqualiter semper inclinantur ad quamlibet prædictarum curuarum, & rectæ lineæ interceptæ, quæ sunt perpendiculares ad vnam ipsarum, non erunt inter se æquidistantes. Et quia, vt dictum est, prædictæ perpendiculares sunt distantiarum legitimæ mensuræ, nunquàm concludi potest certo, quod prædictæ sectiones sint æquidistantes. vel sibi ipsis successiuè viciniores fiant, nisi considerentur rectæ lineæ interceptæ ad vnam sectionum perpendiculares: quod quidem hucusque quod sciam factum non est, neque forsan huiusmodi speculatio inuentu facilis erit, aut iniucunda.

In parabola, vel hyperbola A B C ad eius axim E A I ducere ramum breuissimum æquidistantem alicui rectæ lineæ E F, quæ oportet, vt efficiat cum axi ad partes sectionis angulum A E F acutum, sed in hyperbola sit minor semisse vnius recti, & angulus F E X ab vna asymptoto, & recta linea E F contentus sit acutus. PROP.6. Addit.



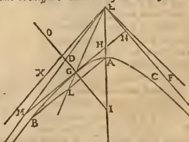
Fiat angulus A E D æqualis angulo A E F, & ex vertice A ducatur recta linea A B efficiens angulum I A B, qui simul cum angulo A E F vnum rectum angulũ compleat; sed in hyperbola, quia vterq; angulus X E A, & A E F deficit à semirecto erũt ambo minores summa præcedentium, scilicet vno angulo recto; ergo ablato cõmuni angulo A E F, erit angulus I A B maior angulo A E X. Postea, quia tam A E F, quàm A E D minor est semisse vnius anguli recti, & A E F cum angulo I A B vnum rectum angulum complent; ergo angulus I A B maior erit angulo D E A: & propterea recta linea A B producta necessario secabit vtramque rectam lineam E D, & E X asymptotum extra sectionem cadentem ad partes D, X; ideoque A B hyperbolen secabit in aliquo alio puncto B. In parabola verò, quia recta linea A B axim secat in vertice A non ad angulos rectos (cum anguli I A B, & A E F rectum compleant) ergo A B sectioni occurrit in duobus punctis. 17. 27. lib. 1. *Secetur iam A B bifariam in L, & per L ducatur diameter sectionis L G sectioni occurrens in G, & per G ducatur contingens G H, seu parallela A B secans axim in H, & per G ducatur I G O perpendicularis ad G H.* 35. 36. lib. 1. 5. lib. 2. *Dico I G problema efficere. Quoniam pro-*



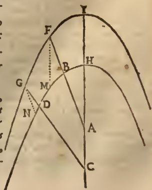


pter parallelas G H, B A, est angulus G H A, seu E H N æqualis angulo B A I; sed anguli B A I, & A E F vnicum rectum complent; ergo duo anguli N H E, & N E H simul sumpti vni recto æquales sunt, & propterea in triangulo E N H reliquus angulus N rectus erit: erat quoque angulus
31. lib. 5. I G H rectus; igitur I G (qui est ramus breuissimus cum sit perpendicularis ad tangentem G H) est æquidistans recta linea E F; quod erat propositum.

SCHOLIVM. *Facile deducitur, quod si angulus A E F fuerit rectus in parabola, & non fuerit semirecto minor in hyperbole facta eadem constructione quilibet ramus breuissimus I G æquidistans erit rectæ lineæ diuidenti angulũ A E F.*



Nam angulus A I G ab axi, & ramo breuissimo contentus est acutus, sed an-
13.14.15. lib. 5. gulus F E A in parabola est rectus; ergo recta linea I G parallela est alicui rectæ lineæ diuidenti angulum A E F, in hyperbola verò factus est angulus A E D æqualis angulo A E F, qui semirecto minor non est; propterea erit totus angulus D E F rectus, aut obtusus; ergo in triangulo E M N externus angulus F N M maior interno, & opposito angulo E recto,
31. lib. 5. vel obtuso, erit quoque obtusus, & angulus I G N rectus est; igitur I G, F N se vicissim secabunt vltra punctum E, & ideo I G parallela erit rectæ lineæ diuidenti angulum A E F. Quod erat ostendendum.



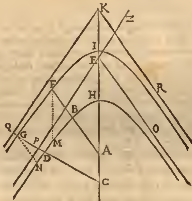
PROP. 7. Addit. *Sint duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ H B D, & I F G circa communem axim A H I: intercepta axis portio erit distantia sectionum omnium maxima, & eis propinquior remotiore maior erit.*

Sint centra E, & K, asymptoti P E O, Q K R, & à vertice H, & à quibuslibet
8.9.10.30. lib. 5. punctis interiores sectionis B D eleuentur lineæ breuissimæ, seu perpendiculares ad rectas curuam B D contingentes in eisdem punctis, quæ sint H A, B A, & D C, quæ secent reliquam sectionem in punctis I, F, & G.

Manife-

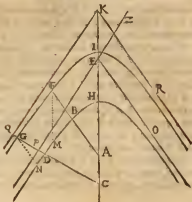
Manifestum est interceptas I H, F B, G D esse minimas linearum rectarum, quæ à punctis I, F, G ad sectionem B D duci possunt; & ideo eadem intercepta erunt distantia quorunlibet punctorum sectionis I F G à sectione B D: & propterea erunt distantia distantia prædictarum curuarum. Ostendendum modo est H I maiorem esse, quàm B F, & B F maiorem, quàm D G, & sic semper. Ducatur à puncto F intercepta recta linea F M parallela axi I H, atque à puncto G ducatur recta linea G N parallela ipsi F B, quæ occurrant sectioni B D in M, N. Et quoniam F M æquidistat vertices coniungenti I H, erit intercepta F M æqualis I H, sed cum ramus B A sit breuissimus, & eius portio F B erit quoque breuissima omnium, quæ ex puncto F ad eandem sectionem B H duci possunt; quare B F minor erit quàm F M, & F M ostensa fuit æqualis I H; igitur distantia intercepta F B minor erit quàm I H. 38. lib. 5. 5. addit. huius. 38. lib. 5.

Secundò quia duæ intercepta B F, N G parallelæ inter se productæ occurrunt axi intra sectiones ad partes A C, & in parabola, quàm secabunt in binis punctis, erunt saltem ordinatim applicatæ ad aliquàm diametrum: in hyperbolis verò 27. lib. 1.



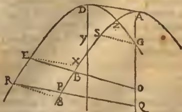
parallelæ erunt recta linea diuidenti angulum P E K à recta linea E K centra coniungente, & E P interiore asymptoto contentum; propterea tam in parabolis, quàm in hyperbolis intercepta B F, quæ vlterius tendit ad partes reliquæ asymptoti E O maior erit intercepta N G; sed quia G D est linea breuissima omnium, quæ ad sectionem H D duci possunt, cum sit portio breuissima D C, quæ perpendicularis est ad rectam contingentem in D, igitur G D minor erit, quàm G N; estque G N ostensa minor, quàm F B; ergo G D minor erit, quàm F B. 3. & 4. addit. 38. lib. 5.

In parabolis autem, quia duci potest aliqua recta linea, vt N G parallela cuilibet intercepta B F; itaut sit N G minor quacunque recta linea data (quando nimirum ad aliquam diametrum ordinatim sunt applicatæ, scilicet, quando vna ipsarum, puta B F occurrat axi intra sectiones; quod quidem necessario eueniet, quando B A est ramus breuissimus) estque ramus breuissimus D G minor Prop. 4. addit. 27. lib. 1.



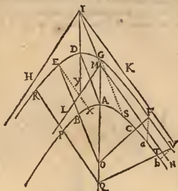
nor eadem G N; igitur distantia sectionum G D minor erit quacunque recta linea proposita. Quia verò (vt constat ex demonstratione casus 2. propos. 3. addit. huius) qualibet recta linea G D intercepta inter hyperbolas conueniens cum axi intra sectiones maior est portione eiusdem recta linea C D G inter æquidistantes asymptotos E P, & K Q intercepta; igitur interuallum inter duas hyperbolas, licet successiuè semper magis, ac magis diminuatur, nunquàm tamen minor effici poterit interuallo duarum æquidistantium hyperbolas continentium E P, & K Q; Quod quidem est perpendiculare ad vtramque rectam continentem E P, & K Q; estque prædicta perpendicularis minima omnium interceptarum inter eas.

PROP.8. Addit. *Duarum parabolarum, vel hyperbolarum A B, D E æqualium, & similium, quarum axes A O, D Y, nec non asymptoti H I K, L M N sint parallelæ inter se, & similiter positæ: Sectionum distantia maxima parallela erit vertices coniungenti, & ei propinquiores ex vtraq; parte maiores sunt remotioribus vsq; ad concursum: si verò distantiam maximam non habent semper augentur quo magis à concursu recedunt.*

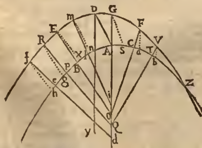


Cadat concursus sectionum Z inter axes A G, & D Y, & asymptoti I K, M N coincidant, aut sibi sint viciniores, quàm I H, M L. Et primò angulus Y D A ab axe Y D, & D A vertices coniungente contentus semirecto minor non sit in hyperbola, sitque rectus in parabola, & vltra concursum Z, ad partes axis D Y, & asymptotorum magis dissitorum H I, L M: sumantur in comprahensa sectione A B qualibet puncta, B, P, à quibus ad axim

ad axim ducantur rami breuissimi O B , Q P præter axim A O , & secent externam curuam in G , E , R , & occursui Z , vel communi asymptoto I M N , 8.9. & 16. lib. 5.

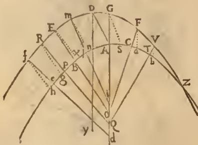


aut vicinioribus asymptotis I K , M N sit A G propinquior, quàm E B , & E B propinquior , quàm R P : Ostendendum est curuarum distantiam A G minorem esse , quàm B E , & B E , quàm P R . Ducantur intercepta G S parallela E B , & E X parallela R P . Et quia in parabola angulus T D A rectus supponitur , & in hyperbola non est minor semirecto , ergo quilibet ramus breuissimus E B , vel R P æquidistans erit rectæ lineæ diuidenti angulum A D T in parabola , & angulum M I H in hyperbola ; sed duarum parallelarum E B , G S , vel R P , E X est G S vertici propinquior , vel vlterius tendit ad partes asymptoti I K , quàm E B ; ergo G S minor est , quàm E B ; estque G A minor , quàm G S , quia illa est portio , vel productio lineæ breuissimæ O A ; igitur G A adhuc minor erit SCHOLIVM. Prop. 6. addit. Prop. 34. addit. 7. & 38. lib. 5.



quàm E B . Eadem ratione E B minor ostendetur , quàm R P . Postea si occursus Z cadit extra duos axes , inter axim A G , & occursum aut ad partes asymptotorum

protorum coincidentium, vel propinquiorum, ad oppositas partes citra axim G A, sumantur duo puncta C, T, & ab eis ducantur ad axim rami breuissimi O C, Q T secantes externam sectionem in F, V; & ab occursu, vel communi asymptoto, vel ab asymptotis viciniorib us I K, M N magis recedat A G, quàm C F, & C F, quàm T V; Dico G A maiorem esse, quàm C T, & C F maiorem, quàm T V. Ducantur intercepta F a *parallela G A, & V* b *parallela C F.*

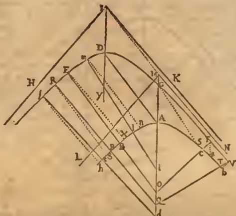


Poſtr.pars pr. 4 add. huius. *Et quia in parabola F* a *propinquior eſt occurſui ſectionum, & parallela eſt diametro G A; at in hyperbola F* a *parallela eſt axi G A, vel D T diuidenti angulum M I H, & F* a *vlterius tendit ad partes asymptoti I K, quàm G A; ergo F* a *minor eſt, quàm G A: eſtque C F productio rami breuiſſimi minor quàm F* a*; ergo A G maior erit, quàm C F. Eodem ratiocinio oſtendetur C F maior, quàm T V.*
Pars 3. prop. 3. addit. huius. 38. lib. 5.

Secundò angulus T D A ſit acutus in parabolis, at in hyperbolis minor ſemirecto, & M I H ab asymptoto I H, & recta linea centra coniungente contentus ſit acutus: Manifeſtum eſt duci poſſe ramum breuiſſimum, vt O B ad ſectionem interiorem A B, qui parallelus ſit recta linea D A vertices coniungenti, vel I M centra coniungenti; & ex vtraque parte ipſius rami O B præter axim A G ducantur quilibet breuiſſimi rami Q P, d e, i l, *O C, qui ſecent externam peripheriam in R,* f, m, *F. Oſtendendum modò eſt in eiſdem coniſectionibus E B eſſe diſtantiam omnium maximam, & R P propinquiorem maximæ maiorem eſſe remotiore* f e*; pariterque* m l *maiorem eſſe quàm G A. Ducantur intercepta R* g, m n *parallela E B, &* f h *parallela R P, nec non G S parallela* m l, *& F* a *parallela G* a. *Quoniam intercepta R* g, m n *parallelæ ſunt eidem E B, & recta linea D A vertices coniungens, vel I M centra coniungens parallela facta fuit eidem E B; ergo E B, R* g, m n *erunt omnes inter ſe æquales; eſtque R P minor, quàm R* g*; pariterque* m l *minor, quàm* m n, *quia illæ ſunt productiones breuiſſimorum ramorum Q P, &* i l*; igitur quælibet diſtantia R P, vel* l m *ex vtraque parte ipſius E B ſumpta minor eſt, quàm E B; ideoque E B erit omnium maxima. Deinde quia O B parallela eſt A D, vel M I, & rami breuiſſimi O B, Q P ſe ſecant vltra axim A O; ergo recta linea R P Q producta ſecabit quoque reliquam parallelarum D A, vel*
Propoſ. 6. addit. huius. 8.9. & 10. lib. 5. Propoſ. 5. addit. huius. 38. lib. 5. 38. lib. 5.

I M

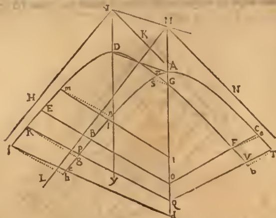
IM ad partes O A M ; ideoque intercepta R P , f h *parallelæ erunt alicui rectæ lineæ diuidenti angulum D A O ab axe interioris parabolæ , & vertices contingente contentum , vel angulum I M L ab asymptoto interioris hyperbolæ , & centra contingente contentum ; igitur R P propinquior verticibus , vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N maior erit quàm* f h *; estque* f h 34. addit.



maior f c *quæ est productio rami breuissimi ; ergo distãtia R P propinquior maximæ E B maior erit , quàm* f c*. E contra quia breuissimus ramus* i l m *cadit inter duas parallelas E B , & D A , & secat ramũ breuissimum E B ad partes O i ;* 38. lib. 5. 28. lib. 5.
ergo l m *occurrit A D , vel M I ad partes D , vel I ; ideoque intercepta* m l *, & et parallela G S erunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum Y D A , in parabolis , vel H I M in hyperbolis : & propterea G S propinquior vertici parabolæ , vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N minor erit , quàm* m l *; estque G A productio rami breuissimi minor quàm G S ; ergo* m l *maior erit , quàm G A ; & sic vlterius G A maior erit C F , quando occursus Z sectionum cadit vltra interceptam F C ad partes T V ; vt in prima parte ostensum est.* 34. addit. 38. lib. 5.

Iisdem manentibus : dico postea , quod vltra distantiam maximam E B ad partes R P , distantia , licet semper diminuantur non efficiuntur minores interuallo diametrorum æquidistantium D Y , A O in parabolis , vel interuallo asymptotorum collateralium I H , M L in hyperbolis , vt facile deducitur ex 3. & 4. additarum . At ad partes asymptotorum congruentium hyperbolæ ad se se ipsas propius accedunt , interuallo minori quolibet dato : Nam in locum ab hyperbole B A C , & asymptoto M N contentum extenditur altera hyperbole E D F ; sed distantia hyperbolæ B A C ab asymptoto M N efficitur minor qualibet data ; igitur distantia hyperbolæ D G F comprehensa ab hyperbole intercipiente minor erit qualibet data distantia.

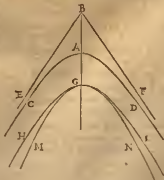
Tandem iisdem positis ducantur ex altera parte concursus Z rami breuissimi O C, Q T, qui efficiant distantias F C, T V. Dico F C propinquiorem concursui Z minorem esse, quàm T V. Quoniam angulus Y D A, vel Y I M supponitur acutus



ponitur acutus; suntque I D Y, M A O inter se, parallelæ; ergo angulus D A O, vel I M O, & multo magis I M N erit obtusus; sed quilibet ramus breuissimus
13. 14. lib. 5. *Q V T parallelus F a efficit cum axi A O angulũ acutũ; igitur ramus breuissimus Q T, & ei parallelus F a sunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum D A O, vel I M N; ideoque F a propinquior concursui, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti I H minor est, quàm T V; estque F C minor*
Propos. 3. & 4. add.
quàm F a (quia illa est portio rami breuissimi) ergo F C minor est, quàm T V. Quod erat propositum.
12. lib. 5.

PROP. 9. Addit.

In duabus hyperbolis C A D, H G I similibus, concentricis, & similiter positis circa communem axim B A G, idest consistant circa cõmunes asymptotos E B F: Dico sectionum C A D, H G I interualla sẽper minui, quo magis ab axis vertice recedunt; atque effici posse minora interuallo quolibet dato.



12. huius. & ex 53. lib. 1.

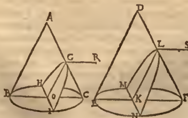
Describatur hyperbole M G N æqualis, similis, & similiter posita ipsi

ipsi C A D circa communem axim A G. Et quoniam hyperbolæ H G I semiaxis transuersus B G maior est transuerso semiaxe B A, hyperboles C A D, pariterquè latus rectum illius maius erit huius latere recto (cum latera figurarum sint proportionalia in hyperbolis similibus:) igitur hyperbole H G I maior est hyperbola M G N (quod ab alijs ostensum est), & consistunt circa communē axim A G, & vertex G est communis; igitur hyperbole H G I comprahendit hyperbolen M G N; & ideo hyperbole H G I cadit inter duas hyperbolas G M, & A C: & propterea hyperbole G H multo magis successiuè vicinior efficitur hyperbola A C, quàm hyperbole G M; sed duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ A C, & G M semper magis, ac magis ad inuicem approximantur, igitur multo magis hyperbolæ concentricæ A C, & G H semper magis, ac magis ad se se ipsas appropinquantur, & inter se non conuenient vt Pappus demonstrauit. Tandem, quoniā linea breuissima, quæ perpendicularis est ad tangentem hyperbolem G H portio ab asymptoto E B, & sectione H G comprahensa effici potest minor quacunque recta linea proposita; cadit verò hyperbole A C inter sectionem G H, & continentem B E; igitur multo magis distantia inter hyperbolas G H, & A C minor erit quæcunque recta linea proposita. Quod erat ostendendum.

12. huius. Propos. 7. addit. lib. 7. prop. 208. 29. 30. lib. 5. Propos. 4. lib. 2.

PROP. 10. Add.

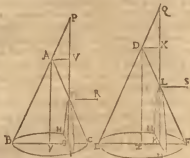
Si in duobus conis ducta fuerint duo triangula per axes A B C, D E F similia, & similiter posita, atq; sectionum I G H, & N L M diametri G O, L K æque ad bases inclinatæ intercipiant cū triangulorum lateribus A B, D E eisdem G O, L K parallelis, portiones O B, K E æquales; vel cum axibus conorum A Y, D Z diametris æquidistantibus intercipiant portiones O Y, K Z æquales, & efficiant angulos A Y C, D Z F æquales: erunt conicæ sectiones inter se æquales, & in qualibet earum duplum interceptæ poterit figuram sectionis.



Primò in parabolis, quia triangula A B C, D E F sunt similia, erit B C ad C A vt E F ad F D, & G O, L K sunt parallelæ homologis A B, D E; ergo O C ad C G, & B O ad G A eandem proportionem habebunt, quàm B C ad C A, seu eandem, quàm habet E F ad F D; estque E K ad L D vt E F ad F D; ergo B O ad G A est vt E K ad L D; suntque B O, E K æquales;

 igitur

igitur G A æqualis est L D : & quia in triangulis similibus rectangulum B A
11. lib. 1. *C ad quadratum B C, seu A G ad latus rectum G R eandem proportionem habet; quàm rectangulum E D F ad quadratum E F, seu quàm D L habet ad latus rectum L S; igitur A G ad G R erit vt D L ad L S; suntq; A G, D L ostensæ æquales ergo G R, & L S latera recta æqualia sunt, & diametri sectionum efficiunt angulos G O H, L K M æquales; ergo parabolæ H G I, & M L N*
Prop 10. huius. *æquales sunt inter se.*



In hyperbolis verò, quoniam P G parallela est axi A Y, & A V parallela est basi B C, & latera P B, & A C sunt communia; igitur P V ad V A est vt A Y ad Y B, & G V ad V A est vt Y A ad Y C: habet verò eadem A Y ad æquales Y B, Y C eandem rationem ergo P V, & G V ad eandem V A habent eandem proportionem, & ideo P V æqualis est V G, atq; punctum V erit centrum sectionis, & quadratum A Y æquale erit quadrato V O (propter parallelogrammum V Y), & quadratum V O æquale est rectangulo P O G cum quadrato V G; pariterque quadratum C Y æquale est rectangulo C O B cum quadrato O Y, & habet quadratum A Y ad quadratum C Y eandem proportionem,
21. lib. 1. *quàm latus transuersum P G ad latus rectum G R, seu eandem, quàm habet rectangulum P O G ad rectangulum C O B, ergo diuidendo quadratum V G ad quadratū O Y eandem proportionem habebit, quàm quadratum A Y ad quadratū Y C, seu vt P G ad G R, seu vt quadratum P G ad rectangulum P G R, & ideo quadratum duplæ V G, seu P G eandem proportionem habebit ad rectangulum P G R, atq; ad quadratum duplæ ipsius Y O; quare quadratum duplæ ipsius O Y æquale erit figuræ sectionis seu rectangulo P G R. Eodem modo ostendetur X centrum hyperbolæ M L N, & quadratum L Q ad quadratum duple K Z esse vt quadratum D Z ad quadratum Z F, seu vt Q L ad L S, & ideo quadratum duplæ ipsius K Z æquale erit figuræ sectionis, seu rectangulo Q L S. Tandem, quia propter similitudinem triangulorum per axes, sunt anguli C, F æquales, & anguli Y, Z pariter æquales (cum ex hypothesi diametri G O, L K parallelæ axibus A Y, D Z efficiant angulos G O C, L K F æquales); ergo A Y ad Y C erit vt D Z ad Z F, & earum quadrata etiam proportionalia erunt; sed P G ad G R est vt quadratum A Y ad quadratum Y C, atque Q L ad*

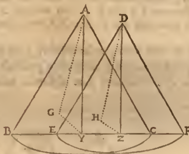
ad L S est, vt quadratum D Z ad quadratum Z F ; igitur P G ad G R eandem proportionem habet , quàm Q L ad L S , & propterea figura sectionem erunt similes ; ijs autē figuris aequalia ostensa sunt quadrata duplicium O Y , & K Z , quae suppositae fuerunt aequales ; igitur figura P G R , & Q L S similes , & aequales sunt inter se , atque diametri aequae inclinatae sunt ad ordinatim ad eas applicatas H I , M N ; igitur sectiones H G I , M L N aequales sunt inter se , similes , & congruentes , quarum figurae aequales sunt quadratis duplicium interceptarum O Y , & K Z , quod erat propositum .

ex 12. huius.

Prop. 10. huius.

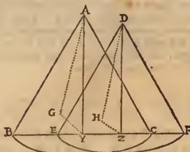
L E M M A IX.

SI in duobus conis A B C , D E F , bases sint in eodem plano , & duo triangula per axes A B C , D E F fuerint similia , & similiter posita , & in eodem plano existentia, erunt coni similes inter se .



Ducantur à verticibus A, & D duae rectae A G , & D H perpendiculares ad bases conorū, & à terminis axium A Y, & D Z coniungantur rectae lineae Y G , & Z H . Quoniā planum , in quo existunt duo triangula A B C , D E F secat planum , in quo bases conorum iacent in vna recta linea , quae basis est vtriusque trianguli per axes conorum ducti ; ideoque B C , & E F in directum constitutae erunt , & circa angulos aequales B , & E latera A B ad B C , atque D E ad E F sunt proportionalia (propter triangulorum A B C , & D E F similitudinem) erunt quoque ad consequētium semisses proportionales , scilicet A B ad B Y erit , vt D E ad E Z circa angulos aequales , & propterea triangula A B Y , & D E Z similia erunt : & ideò duo anguli B Y A , & E Z D , externus interno , aequales erunt inter se ; igitur Y A , & Z D in eodem plano existentes , parallelae erunt inter se ; sunt quoque A G , D H inter se parallelae (cum sint perpendiculares ad idem planum basium) ergo duo anguli Y A G , & Z D H aequales sunt inter se ; atquè anguli G , & H aequales sunt , nempe recti ; igitur in triangulis A Y G , & D Z H , duo postremi anguli A Y G , & D Z H aequales sunt

inter

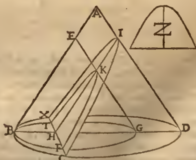


inter se : hi autem anguli inclinationes sunt axium conorum ad suas bases ; igitur axes A Y , & D Z æque sunt inclinati ad suas bases : suntque proportionales ad basium semidiametros Y B , & Z E (cum triangula A B Y , D E Z similia ostensa sint) ; igitur coni A B C , & D E F similes sunt inter se . Quod erat ostendendum .

Defin.8. huius.

PROP. 11. Addit.

Data parabola Z duos conos similes exhibere , vt idem planum efficiat in eis duas parabolas æquales eidem datæ parabolæ , quæ asymptoticæ sint , & sibi ipsis viciniores fiant distantia minore quacunque data .

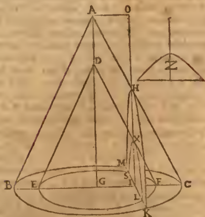


In quolibet plano fiat angulus I H C æqualis angulo inclinationis diametri , & basis parabolæ Z , & per H C extenso alio quolibet plano ducatur in eo B H G perpendicularis ad X H C ; & fiat quodlibet triangulum H G K , & vt quadratum H G ad rectangulum H K G , ita fiat latus rectum parabolæ Z ad productionem

ductionem K E, & ab E ducatur A E B parallela I H, quæ secet G H in B: postea producatur H K, vt cumq; in I, & per I ducatur A I D parallela E G, quæ secet B G in D; & in plano B X D C, diametris B G, B D, fiant duo circuli, qui sint bases duorum conorum, quorum vertices A, & E, & in eorum superficiebus planum per X I C ductum, efficiat sectiones C I X, & F K T. Dico eas esse parabolas quæsitas. Quoniam recta E G facta est parallela ipsi A D; igitur duo triangula A B D, & E B G per axes conorum ducta similia, & similiter posita in eodem sunt plano; & duo circuli basium in eodem sunt plano; ergo coni A B D, & E B G similes erunt: postea quia triangula Lem. 9. huius.
A B D, & E B G similia sunt, & I K H communis diameter sectionum ad coincidentes bases C X, F T æque inclinata, & recta linea A E B à verticibus conorum ducta parallela sunt inter se, atque intercipiunt in angulis æqualibus A B H, & E B H communem portionem B H basium triangulorum similium per axes; ergo parabolæ C I X, & F K T æquales sunt inter se. Secundò, quia Prop. 10. addit.
propter parallelas E B, K H sunt triangula E B G, H K G similia; ergo quadratum B G ad rectangulum B E G scilicet latus rectum parabolæ F K T ad K 11. lib. 1.
E est, vt quadratum H G ad rectangulum H K G; sed latus rectum parabolæ Z ad K E fuit vt qtadratum H G ad rectangulum H K G; igitur duo latera recta, parabolæ Z, atq; parabolæ F K T ad eandem K E habent eandem proportionem, & propterea æqualia sunt, & diametri, ad bases æque inclinatæ sunt ex constructione; igitur parabole F K T, & ei æqualis C I X erit æqualis eidem parabolæ Z. Tertiò quia sectionum plano, & communi diametro I Prop. 10. huius.
K H æquidistat cummune lateris A E B, in quo duo coni se se contingunt; ergo latus A E B nunquàm occurret plano C I X: sed duæ superficies conicæ tantummodo se se tangunt in latere A E B, & reliquis omnibus in locis separatæ sunt; igitur duæ parabolæ C I X, F K T in illo plano positæ per contactum A E B non transeunte, & extensæ in duabus conicis superficiebus nunquàm conuenientibus, erunt asymptoticæ. Quartò quia duæ parabolæ C I X, F K T æquales sunt, & similiter positæ circa communem diametrum I K H; ergo earum distantia semper magis, ac magis diminuuntur quousque sint minores qualibet recta linea data. Quod erat faciendum. Propos. 7. addit.

Data hyperbola Z duos conos similes exhibere, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas æquales, & similes datæ, quæ asymptoticæ sint, & sibi ipsis semper viciniores fiant, non tamen interuallo minore recta linea data. PRO I. 12. Addi t

In quolibet plano fiat angulus H I M æqualis angulo inclinationis diametri, & basis datæ hyperboles Z, & per M I extenso quolibet alio plano ducatur in eo B I C perpendicularis ad M I K; & sumpto quolibet puncto O in recta linea I H producta, ducatur à puncto O in plano per O I B extenso recta linea O A parallela ipsi B I, & secetur O A æqualis semissi potentis figuram sectionis Z, cuius rectum latus ad transuersum eandem proportionem habeat quàm quadratum A O ad quadratum O H; atque à puncto A ducatur recta linea A D G parallela ipsi H I, & coniungatur A H, quæ secent rectam lineam G I in punctis G, & C, & secetur recta linea G B æqualis G C iungaturq; A B, & à quolibet puncto D in recta A G sumpto ducatur in eodem plano A B C duæ rectæ lineæ D E, & D F parallelæ lateribus A B, & A C; eruntque triangula A B C,



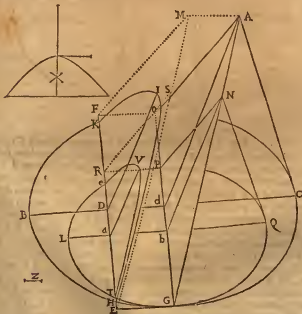
A B C , & D E F similia , & similiter posita : postea in plano per B C , M K ducto , diametris B C , & E F , fiant duo circuli B K C , E L F , qui sint bases duorum conorum , quorum vertices sint A , & D , & in eorum superficiebus planum per H I , M K ductum efficiat sectiones K H M , & L X S: Dico eas esse quæsitas. Quoniam duo triangula A B C , D E F similia , & similiter posita in eodem sunt plano, pariterquè duo circuli basium in vno plano existunt;
Lem. 9. huius. *ergo duo coni A B C , & D E F similes erunt ; postea quia triangula A B C , & D E F similia sunt , & communis sectionum diameter H X I æque inclinatur ad coincidentes bases M K , S L , & axi communi A D G æquidistat , &*
Prop. 10. add. *in angulis æqualibus intercipiunt G I communem portionem basium triangulorum similium per axes ; igitur hyperbolæ K H M , & L X S æquales sunt , & similes inter se , & earum figuris æqualia sunt quadrata ex dupla intercepta G I descripta. Secundò quia (propter parallelas A O , & B C) triangula H O A , & A G C similia sunt ; igitur quadratum A G ad quadratum G C , seu ad rectangulum B G C eandem proportionem habebit, quàm quadratum H O ad quadratum O A , seu quàm latus transuersum ad rectum figuræ Z ; sed vt quadra-*
12. lib. 1. *tum A G ad rectangulum B G C , ita est latus transuersum ad rectum hyperboles K H M ; igitur duæ hyperbolæ Z , & K H M , habent figurarum latera porportionalia; suntq; prædictæ figuræ æquales cum sint æquales quadratis ex duplis ipsarum A O , & intercepta G I : quæ sunt æquales in parallelogrammo G*
10 12. huius. *O , & habent angulos à diametris , & basibus contenti , æquales inter se : erunt hyperbolæ K H M , & Z æquales , & similes inter se : & propterea sectio L X S, quæ similis , & æqualis ostensa est ipsi K H M , erit quoque æqualis , & similis eidem sectioni Z. Tertiò , quia in duobus conis similibus , & similiter positis circa communem axim A D G , superficies nunquàm conueniunt , propterea quod latera A B , & D E , à quibus generantur in tota reuolutione inter se*

parallela

parallela conseruantur; igitur duæ sectiones K H M, & L X S, existentes in eodem plano secante duas superficies, quæ licet in infinitum producantur vbique separata sunt, erunt asymptoticæ. Quartò, quia duæ hyperbolæ H K M, & L X S sunt æquales, similes, & similiter positæ circa communem diametrum H X I, earum distantiæ semper magis, ac magis diminuuntur; nunquam tamen minores effici possunt interuallo duarum æquidistantium, hyperbolas continentium. Et hoc erat propositum. Prop. 7. addit.

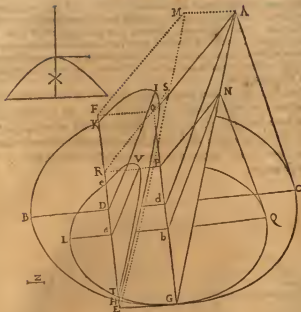
PROP. 13. Addit.

Data hyperbola X duos conos similes exhibere vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas similes, & æquales datæ, quæ asymptoticæ sint, & ex vna parte sibi ipsis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato: ex altera verò parte ad se ipsas propius accedant interuallo tamen maiore dato: oportet autem vt angulus ab asymptotis sectionis X contentus sit acutus.



In quolibet plano fiat angulus A d *O æqualis angulo inclinationis diametri, & basis hyperbolæ X; & per O* d *extenso quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B* d *C perpendicularis ad O* d *G, & sumpto quolibet alio puncto* b *in recta linea G O in plano per B G C O ducto, centris* d, *&* b *describantur duo*

 circuli



circuli G C O B, & G Q P L se se contingentes in communi puncto G recta linea G O ducaturque diameter L b Q æquidistans ipsi B C: & vt latus rectum ad transuersum sectionis X, ita fiat quadratum G d ad quadratum d A; & coniungantur recta linea A G, & A O, ducaturque ex puncto P recta linea P N parallela ipsi O A occurrens G A in N, atque A, & N fiant vertices duorum conorum A B C, & N L Q, & secetur D d æqualis semissi potentis figuram sectionis X; ducaturque per punctum D planum E M F æquidistans plano communi A G O per axes ducto, efficiens in conicis superficiebus sectiones H I K, & T V c; Dico eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam propter parallelas A O, N P est A G ad G O, vt N G ad G P, & ad semisses consequentium, scilicet A G ad G d, atque N G ad G b proportionales erunt, ideoque A d, N b erunt parallelæ, & A d ad d G, seu ad d C est vt N b ad b G, seu ad b Q; estque d C etiam parallela b Q; ergo plana A B C, & N L Q parallela sunt, & anguli A d C, & N b Q æquales sunt, atque triangula A d C, & N b Q similia erunt inter se; ideoque circa angulos æquales C, & Q erit A C ad C d, vt N Q ad Q b, & ad consequentium duplas, scilicet A C ad C B, atq; N Q ad Q L proportionales erunt; & propterea triangula A B C, & N L Q similia erunt, & similiter posita, & inter se parallela; ergo efficient in duobus planis A O G, & M E F inter se æquidistantibus sectionũ diametros I D, & V a parallelas conorũ axibus A d, & N b, & inter se; quare constituent cum sectionũ basibus coinci-

coincidentibus angulos æquales I D H, & V a T & cum ipsis D d, & a b etiã parallelis inter se continebunt angulos æquales I D d, & V a b, eruntque intercepta D d, a b æquales (cum sint latera opposita parallelogrammi D b); igitur hyperbole H I K, & T V e æquales sunt inter se, & similes atq; earum figuris æqualia sunt quadrata ex duplis interceptarum D d, & a b. Et quia triangula A G O, N G P sunt similia in eodem plano, suntque pariter duo circuli basium in vno plano extensi; igitur coni A B C, & N L Q similes sunt inter se. Secundò quia vt quadratum A d ad rectangulum G d O, seu ad rectangulum B d C ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K, & (ex constructione) in eadem proportione erat latus transuersum ad rectum hyperboles X, atque anguli I D K, & A d O æquales sunt inter se (propterea quod D I, d A parallelæ sunt, pariterque D K, d O parallelæ sunt inter se, cum communes sectiones sint plani basis, & duorum planorum æquidistantium K I H, & O A G): & erat angulus inclinationis diametri, & basis hyperbolæ X æqualis angulo A d O; igitur diametri sectionum X, & H I K ad suas bases æque inclinantur, & habebant latera earundem figurarum proportionalia; suntq; prædictæ figuræ æquales, cum sint æquales quadrato ex dupla intercepta D d vt dictum est: igitur sectiones H I K, & X similes sunt inter se, & æquales; ideoque reliqua sectio T V d, quæ æqualis, & congruens ostensa est ipsi H I K, erit quoque similis, & æqualis eidem hyperbolæ X. Tertiò quoniam plana H I K, & G A O æquidistantia sunt, nunquam conuenient; & ideo planum H I K nunquam lateri A N G alterius plani occurret; sed superficies conicæ se se tantummodo tangunt in communi latere A N G, & alibi perpetuo separata incedunt; igitur duæ sectiones H I K, & T V e in plano E I K existentes, quæ infinitè producuntur in superficiebus conicis, nunquam se se mutuo secant; igitur sectiones ipsæ asymptoticæ sunt. Quartò ducantur rectæ lineæ G E, O F, P R tangentes circulos in extremitatibus communis diametri G P O, quæ parallelæ erunt inter se (cum perpendiculares sint ad communem diametrum G P O): postea producantur plana E G A, F O A, R P N tangentia conos in lateribus G A, O A, & P N, & extendantur quousque secent planum conicæ sectionis H I K in rectis lineis E S M, F M, R S. Et quoniam duo plana æquidistantia G A O, et E M F efficiunt in eodem plano E G A, vtrumque conum contingente, duas rectas lineas G A, E M æquidistantes inter se: pari ratione in plano tangente F O A erunt rectæ lineæ F M, et O A parallelæ inter se: simili modo in plano R P N erunt P N, et R S inter se æquidistantes, cumque A O, et N P parallelæ sint, erunt quoque F M, et R S inter se æquidistantes; suntque E M, et M F asymptoti continentes hyperbolen E I K pariterq; rectæ lineæ E S, S R sunt asymptoti hyperboles T V e: quare duæ hyperbolæ H I K, et T V e, similes eidem X, et æquales, & similiter positæ, quarum duæ asymptoti F M, R S æquidistantes sunt; reliquæ verò E M, & E S coincidunt (cum existant in eodem plano tangente E A), & angulus ab eis contentus E M F, vel E S R est acutus (cum æqualis sit acuto angulo ab asymptotis sectionis X contento, propter similitudinẽ sectionũ, vt ab alijs ostensum est): poterit ergo duci ramus breuissimus in sectione T V e ad partes V e qui æquidistãs sit rectæ lineæ V I vertices sectionũ coniungenti: eritque illius breuissima portio inter sectiones comprehensa distantia omniũ maxima; & propterea interualla sectionũ ad vtrasq; partes maximæ distãtiæ successiuè diminuuntur, & ad partes æquidistantiũ asymptotorũ F M, R S diminuuntur

Prop. 10. addit. huius.

Lem. 9. huius.

10. 12. huius.

Maurol. lib. 3. de lin. horar. ca. 6. 7.

Propos. 6. addit. huius.

Propos. 8. addit. huius.

nuuntur

nuuntur quidem; sed non efficiuntur minora interuallo quo parallelæ asymptoti distant inter se; ex altera verò parte peruenitri potest ad interuallum minus quolibet dato. Et hoc erat faciendum.

PROP. 14. Add. *Data hyperbola eadem X præcedentis propositionis describere duos similes conos, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas similes datæ sectioni, quæ asymptoticæ sint, & ex vtraque parte sibi ipsis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato.*

In quolibet plano fiat angulus A d *G æqualis angulo inclinationis diametri, & basis hyperbolæ datæ X, & per G* d *extenso quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B* d *C perpendicularis ad G* d *O, & sumpto quolibet alio puncto* b *in recta linea B C in plano per B G O extenso, centris* d*, &* b*, describãtur duo circuli inter se æquales G C O B, & S Q P L se se secantes in duobus punctis R,* a*: atq; vt latus rectum ad transuersum sectionis datæ X, ita fiat quadratũ G* d *ad quadratũ* d *A, & ducatur recta linea A N M parallela ipsi B C, quæ secet* b *N æquidistantẽ* d *A in N, & coniungantur rectæ lineæ A B, A C, N L, N Q, & fiant A, & N vertices duorũ conorũ A B C, N L Q, & in eorũ superficiebus planum M* c *T æquidistans planis A G O, & N S P efficiat sectiones H I K, & T V* c*, quarum diametri D V I genitæ à triangulis A B C, & N L Q per axes in eodem plano existentibus sunt æquidistantes axibus conorum A* d*, N* b*, propter planorum æquidistantiam: Dico, eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam (propter æquidistantiam oppositarum linearum) est spatium A* b *parallelogrammum; igitur conorum axes A* d*, N* b *æquales sunt inter se, & æquè inclinantur ad communem rectam lineam B C Q (propter æquidistantiam earundem A* d*, N* b*); suntque æqualium circulorum radij* d *B,* d *C,* b *L,* b *Q æquales inter se; igitur triangula A B C, N L Q similia sunt inter se, & similiter*

ter posita in eodem plano; suntquè etiam duo circuli basium in vno plano extensi, igitur coni A B C, & N L Q similes sunt inter se; & quoniam, vt latus transuersum ad rectum sectionis datæ X, ita est quadratum A d *ad quadratum* Lem. 9. huius. *radij G* d, *& ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K; pariterque vt quadratum N* b *ad quadratum radij L* b *ita est latus transuersum ad rectũ hyperbolæ T V* c; *Et quadrata axium ad quadrata radiorum baseos eandem proportionem habet ideo latus transuersum ad rectum sectionis H I K eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum alterius sectionis T V* c, *seu eandem, quàm habet latus transuersum ad rectum datæ sectionis X; atque diametri I V D, & diameter sectionis X æquè inclinantur ad bases, vt dictum est; igitur duæ sectiones H I K, & T V* c, *nedum datæ hyperbolæ X;* Prop. 13. huius. *sed etiam inter se similes sunt. Secundò quoniam duæ peripheriæ circulorum basium circa communem diametrum B C Q se se mutuo secant in duobus punctis R, &* a, *quæ necessario cadunt inter duas circulorum diametros G O, S P perpendiculares ad communem diametrum B C Q; igitur superficies conorum vicissim se secant semper inter duo triangula, per conorum axes A G O, & N S P, in reliquis autem locis separatæ sunt; planum verò efficiens sectiones H I K, T V* c *cadit nõ inter axes A* d, *& N* b; *igitur duæ sectiones H I K, & T V* c *existentes in duabus conicis superficiebus, non se secantibus, nunquàm conuenient, & asymptoticæ erunt. Tertiò quoniam recta linea N A M per vertices conorum ducta parallela est communi basi B Q triangulorum per axes, & secat diametrum communem D V I in M: ergo (sicuti ostensum est in prop. 10. addit. huius) erit punctum M centrum sectionis H I K, atq; centrum alterius sectionis T V* c; *ergo duæ sectiones H I K, & T V* c *similes sunt inter se, concentricæ, & similiter positæ circa communem diametrum D V I; igitur se-* Propos. 9. addit. huius. *ctionum interualla semper magis, ac magis in infinitum minuuntur, & reperiri possunt minora quolibet interuallo dato. Et hoc erat ostendendum.*

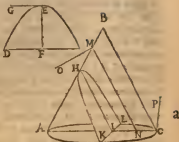
SECTIO DECIMA

Continens Proposit. XXVI. XXVII. & XXVIII.

PROPOSITIO XXVI.

IN cono recto, cuius triangulum per axim sit A B C reperire sectionem datæ parabolæ D E æqualem, cuius axis E F, & erectum E G.

Vt qua-



Vt quadratum A C ad C B in B A, ita ponatur E G ad B H : & educamus H I parallelam B C , & extendatur per H I planum eleuatum super triangulum A B C ad angulos rectos efficiens in cono sectionem K H L. Dico eam æqualem esse sectioni D E. Quia quadratum A C ad C B in B A est , vt E G ad B H ; ergo potentes eductæ ad axim H I in sectione K H L possunt applicata contenta ab abscissis illarum potentium , & ab E G ; quare E G erit erectum sectionis K H , & idem etiam est erectum sectionis D E ; ergo duo erecta duarum sectionum sunt æqualia , & propterea sectiones æquales sunt (1. ex 6.) a

Et dico , quod in cono A B C reperiri non potest sectio alia parabolica , cuius vertex sit super A B , quæ eidem D E sit æqualis . Si enim hoc est possibile , sit axis illius sectionis M N, qui quidem cadet in triangulo A B C ; quia conus est rectus, & erectum illius sit M O ; atq; M O ad M B erit , vt G E ad B H ; estque B H maior, quàm B M; ergo M O minor est, quàm G E ; quare sectio , cuius axis est M N non est æqualis sectioni D E ; & tamen supposita fuit æqualis illi , quod est absurdum . Quare patet propositum . b

ex conu. Prop. 1. huius.

PROPOSITIO XXVII.

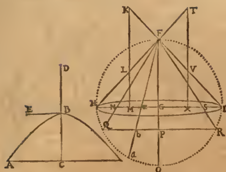
SIt deinde hyperbole A B , cujus axis C D , inclinatus B D , & erectus B E ; atque quadratum axis F G dati coni recti F H I ad quadratum G H semidiametri basis eius , non habeat maiorem proportionem , quàm habet figura , scilicet quàm habet D B ad B E. a

Sit prius proportio eadem , & producamus I F ad K ; & ducamus K L subtendentem angulum H F K , quæ parallela sit ipsi F G , & æqualis existat ipsi D B ; & per K L planum extendatur eleuatum ad angulos rectos super planum trianguli H F I , quod efficiet in superficie conica sectionem hyperbolicam , cuius axis erit L M , & inclinatus K L. Et quia

12. lib. 1. F G parallela est K L , erit quadratum F G ad G I in G H , vt K L inclinatus ad illius erectum , siue vt D B ad B E ; facta autem fuit K L æ-

2. huius. qualis D B ; ergo erectus inclinati K L æqualis est B E ; & propterea sectio , cuius axis est L M æqualis est sectioni A B. Nec reperiri poterit in cono H F I alia sectio hyperbolica , cuius vertex sit super H F , quæ æqualis sit A B; quia, si reperiri posset esset illius axis in plano trianguli H F I, & eius inclinatus, subtendens angulum H F K æqualis esset D B, nec tamen esset K L , neque ipsi æquidistans (eo quod , si æquidistaret b

ipsi

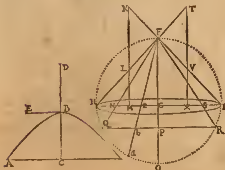


ipſi K L, non eſſet eidem æqualis.) His poſitis ſi educatur ex F linea ipſi parallela cadet inter F G, F H, aut inter F I, F G; ſitque F N; igitur quadratum F N ad I N in N H eſt, vt D B ad B E: quod eſt abſurdum; quia quadratum F N maius eſt, quàm quadratum F G, & N H in N I minus eſt, quàm quadratum G H. 12. lib. 1.

Poſtea habeat quadratum F G ad quadratum G H minorem proportionem quàm habet D B ad B E; & circumſcribamus circa triangulum H F I circulum; & producamus F G quouſque occurrat circuli circumferentię in O; ergo quadratum F G ad quadratum G H, nempe ad F G in G O habet minorem proportionem, quàm D B ad B E: & ponamus F G ad G P, vt D B ad B E; & per P ducamus P Q parallellam H I; & coniungamus F R, F Q; quæ occurrant H I in S, N: quare D B ad B E eſt, vt F G ad G P, quæ eſt, vt F N ad N Q; nempe vt quadratum F N ad F N in N Q æquale ipſi I N in N H, atque vt quadratum F S ad F S in S R, nempe vt quadratum F S ad I S in S H; & educamus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos H F K, I F T, & ſint parallelæ ipſis F N, & F S, & æquales ipſi D B; igitur duo plana per K L, T V extenſa ſuper triangulum H F I ad angulos rectos eleuata, producunt in cono H F I ſectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipſarum L K, T V, & ſinguli earum ad ſuos erectos eandem proportionem habent, quàm D B ad B E, & propterea figuræ ſectionum ſimiles ſunt, & æquales, ideoque ſectiones, quarum axes ſunt L M, V X ſunt æquales ſectioni A B. 2. huius.

Nec reperitur ſectio præter iam dictas, cuius vertex ſit ſuper aliquam duarum linearum H F, F I, & ſit æqualis ſectioni A B. Quia ſi reperiri poſſet, caderet eius axis in planum trianguli H F I, illiuſque axi educatur parallela F Z a, quæ non cadet ſuper F R, neque ſuper F Q, eritq; quadratum F Z ad I Z in Z H, quod eſt æquale ipſi F Z in Z a, nempe F Z ad Z a eandem proportionem haberet, quàm D B ad B E; ſed D B ad B E eſt, vt F G ad G P, nempe F Z ad Z b; ergo proportio F Z

ad

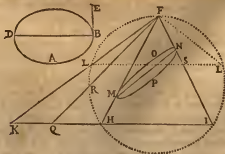


ad Z *b*, & ad Z *a* eſt eadem; & propterea Z *b* æqualis eſt Z *a*, quod eſt abſurdum.

Ponamus iam quadratum F G ad G H in G I maiorem proportionem habere, quàm D B ad B E. Dico in cono H F I exhiberi non poſſe ſectionem æqualem hyperbolæ A B. Si enim exhiberi poſſet illius axi aliqua parallela reperiretur vt F N: & quadratum F N ad I N in N H maiorem proportionem habens, quàm quadratum F G ad quadratum G H, erit vt D B ad B E; quæ minor eſt proportione quadrati F G ad quadratum G H: quod eſt abſurdum. Non ergo reperitur in cono H F I ſectio æqualis hyperbolæ A B. Et hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXVIII.

SIt iam ſectio elliptica A B, cuius axis tranſuerſus B D, & erectus illius B E, & circa coni triangulum H F I deſcri- a

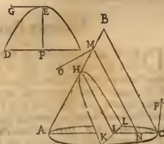


bamus

bamus circulum, & ex F ducamus lineam ad H I, occurrentem ipsi extra circulum in K, & occurrat circulo in L, itaut sit F K ad K L, vt D B ad B E (& hoc est facile, vti demonstrauimus in 59. ex 1.), & educamus in triangulo chordam M N
b
c parallelam F K, & æqualem D B; Aio quod planum transiens per M N erectum super triangulum coni producit in cono H F I sectionem ellipticam, æqualem sectioni A B.

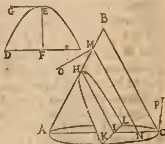
Quia D B transuersus ad eius erectum B E eandem proportionem habebat, quàm F K ad K L, nempe quàm quadratum F K habet ad F K in K L, quod est æquale ipsi I K in K H; estque vt M N parallela ipsi F K 13. lib. 1. ad illius erectum; quare D B ad B E eandem proportionem habet, quàm M N ad illius erectum; & M N æqualis est D B; igitur figuræ duarum
d rum sectionum A B D, M O N P sunt æquales, & similes, & ideo 2. huius. duæ illæ sectiones sunt æquales. Dico insuper, quod non reperitur in
e cono H F I vlla alia sectio elliptica, habens verticem super F I, cuius axis non æquidistet alicui duarum F L K, quæ æqualis sit eidem B A D. Quia si possibile esset, ostenderetur axis eius cadere in planum trianguli H F I, quia sectio est elliptica, & æqualis sectioni A B, vtiq; eius axis occurret F I, F H, & æqualis est D B; cumque vertex illius sit super F I, non cadet axis eius super M N, nec ipsi erit parallelus; & ideo educta F Q parallela axi eius non cadet F Q super F K, & secabit arcum F H in R; eritque proportio axis illius sectionis ad eius erectum, nempe 13. lib. 1. quadratum F Q ad I Q in Q H, quod est æquale ipsi Q F in Q R, nempe vt F Q ad Q R, ita erit D B ad B E, quæ eandem proportionem habet
f bet quàm F K ad K L, & diuidendo permutandoq; F R maior subtensa ad minorem F L eandem proportionem habebit, quàm R Q minor intercepta ad maiorem K L; quod est absurdum: non ergo reperitur in cono H F I sectio elliptica, verticem habens in F I, quæ sit æqualis sectioni A B, præter superius expositam. Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. XXVI.



a Ergo potentes egredientes ex sectione L H K ad axim H I poterunt applicatum, quod continet abscissum illius potentis cum G E; ergo G E est erectus sectionis L H; & est etiã erectus sectionis D E; igitur duo applicata duarum sectionũ sunt æqualia, & ideo sectio D E congruit sectioni K H L, & propterea æquales sunt, &c. *Ex eo quod quadratum A C basis trianguli per axim coni recti ad rectangulum C B A, sub eius lateribus*

 con-



contentum, habet eandẽ rationem, quam G E ad H B, sufficienter deducitur, quod
11. lib. 1. *G E sit latus rectum tàm parabolæ L H K, quàm D E; & ideo erit parabole L*
Propos. 1. huius. *H æqualis D E. Non igitur necesse est, vt rectangula sub abscissis, & lateribus rectis æqualibus ostendâtur æqualia inter se, & inde eliciatur æqualitas, & congruentia sectionum. Quapropter casu illa verba in Codice Arabico irrepsisse puto.*

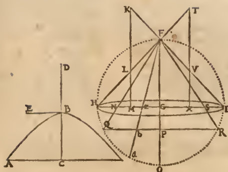
Et dico, quod non reperiatur in sectione A B C alia sectio parabolica; quia si reperiretur, &c. *Verba, quæ in hoc textu addidi ex serie demonstrationis facile colliguntur: Sed animaduertendum est, quod ne dum in cono recto, sed in quolibet cono scaleno quomodolibet per axim secetur triangulo A B C, designari potest in eius superficie parabole æqualis datæ D E.* b

Ducatur C P contingens circulum basis in C, & in parabola D E ducatur
51. lib. 2. *diameter E F, & contingens verticalis, quæ contineat angulum F E G æqualem angulo B C P; sitque G E latus rectum diametri F E; atque vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ita fiat G E ad H B, & per H extendatur planum L H K æquidistans plano per B C P ducto. Dico sectionem L H K esse parabolen quæsitam. Quia plana æquidistantia L H K, & B C P efficiunt in circulo basis rectas P C, L K inter se parallelas, & in plano A B C efficiunt rectas H I, B C inter se parallelas; ergo anguli B C P, & H I L æquales sunt, sed in parabola D E diameter E F efficit cum ordinatis ad eam applicatis angulos*
Conu. 46. lib. 1. *æquales F E G, scilicet ei, qui cum tangente verticali constituit, seu angulo B C P; ergo duarum sectionum L H K, & D E, diametri H I, & E F æque sunt inclinatæ ad suas bases, cumque latus rectum parabolæ L H K ad H B sit, vt quadratum C A ad rectangulum C B A, seu vt G E ad H B; igitur duo latera recta similium diametrorum I H, & F E ad H B eandem proportionem habent; & ideo æqualia sunt inter se; quare sectiones ipsæ æquales, & congruen-*
10. huius. *tes erunt. Quod erat ostendendum.*

Multoties in eodem cono duæ parabolæ æquales subcontrariæ duci possunt, vt Mydorgius demonstrauit.

Notæ in Proposit. XXVII.

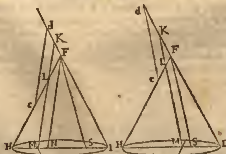
DEinde sit hyperbole, vt A B, & axis illius C D, & inclinatus B D, & erectus B E, ita vt non sit proportio quadrati axis coni ad quadratum dimidij diametri illius basis, vt quadratum F G ad quadratum G H, maior, quàm proportio figuræ sectionis: &c. *Sensus huius propositionis hic erit. In cono recto F H I, cuius triangulum per axim H F I reperire sectionem æqualem hyperbole datæ A B, cuius transuersus axis D B, & latus rectum B E. Oportet autem, vt quadratum F G axis dati coni ad quadratum radij G H circuli basis non habeant maiorem proportionem, quàm habent* a

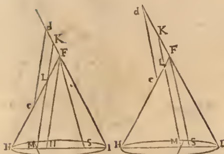


bent figuræ latera, ſcilicet, quàm habet D B ad B E. At quomodo duci debeat ſubtenſa K L quæ æqualis ſit ipſi D B, & parallela alteri F G, oſtendetur inferius.

b Et non reperitur in cono H F I alia ſectio hyperbolica ſuper F H, & æqualis A B, &c. *Addidi verba quæ ad huius textus integritatem facere videbantur.*

c Et educamus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos L F K, I F T, & ſint parallelæ ipſis F N, F S, & æquales D B, &c. *Quomodo autem hoc fieri poſſit modo oſtendemus. Sumatur in recta linea H F quodlibet punctum* c *inter F, & H; atque à puncto* c *ducatur recta linea* c d *parallela ipſi F N, vel F S, quæ ſecet productionem alterius lateris I F in* d, *& quàm proportionem habet* c d *ad D B, eandem habeat C F ad F L, & per punctum L ducatur recta L K parallela ipſi* c d. *Manifeſtum eſt* c d *ad L K eandem proportionem habere, quàm* c *F ad F L, ſeu quàm* c d *ad B D; & ideo K L æqualis erit B D, & ſubtendit angulum L F K, eſtque parallela ipſi* c d, *ſeu ipſi F N, vel F S. Et hoc erat faciendum.*





Igitur duo plana tranſeuntia per K L, T V eleuata ſuper triangulum H F I ad angulos rectos producunt in cono H F I duas ſectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X; & inclinati ipſarum L K, V T, & ſinguli eorum ad ſuos erectos ſunt, vt D B ad B E; ergo figuræ trium ſectionum ſunt ſimiles, & æquales; & propterea duæ ſectiones, quarum axes ſunt L M, V X ſunt æquales ſectioni A B, &c. *Ex textu mendoſo expungi debent ſuperuacanea aliqua verba, ſicut in contextu habetur. Non enim verum eſt, quod duæ tantummodo hyperbole æquales eidem A B duci poſſunt in cono recto H F I, vertices habentes in lateribus H F, & F I, ſed quatuor inter ſe æquales eſſe poſſunt; nam ſuper latus F H duci poſſunt duæ hyperbole, quarum axes tranſuerſi K L æquales ſint ipſi B D, & æquidiſtantes ſint rectis lineis F N, & F S. Quod ſic oſtendetur. Quoniam recta linea Q R ducta eſt parallela ipſi H I erunt duo arcus circuli intercepti H Q, I R æquales inter ſe; & ideo duo anguli ad peripheriam H F Q, & I F R æquales erunt inter ſe; poſita autem fuit K L æqualis, & parallela ipſi F N; igitur duo anguli alterni K L F, & H F N æquales ſunt inter ſe: pari ratione; quia reliqua K L ducta eſt parallela ipſi F S, erit angulus externus S F I æqualis interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes L K F; & ideo duo triangula L F K habent angulum F, communem, & duos angolos in ſingulis triangulis K, & L æquales; igitur ſunt æquiangula, & ſimilia, &, vt antea dictum eſt, fieri poſſunt duæ rectæ lineæ K L æquales eidem D B, & inter ſe: ſi igitur per duas rectas lineas K L ducantur plana perpendicularia ad planum trianguli per axim H F I, efficientur in cono recto duæ hyperbole, quarum bini axes tranſuerſi K L ſunt æquales: & quia, propter parallelas H I, Q R, eſt F N ad N Q ſeu quadratum F N ad rectangulum F N Q vt F S ad S R ſeu vt quadratum F S ad rectangum F S R; ſed rectangulum H N I æquale eſt rectangulo F N Q, & rectangulum H S I æquale eſt rectangulo F S R: ergo quadratum F N ad rectangulum H N I eandem proportionem habet, quàm quadratum F S ad rectã-*
12. lib. 1. *gulum H S I; eſtque latus tranſuerſum K L ad ſuum latus rectum, vt quadratum F N ad rectangulum H N I, pariterque latus tranſuerſum K L alterius*
Ibidem. *ſectionis ad ſuum latus rectum eſt vt quadratum F S ad rectangulum H S I:*

igitur

igitur duo æqualia latera transuersa K L ad sua latera recta eandem proportionem habent, & ideo huiusmodi latera recta æqualia sunt inter se; ideoque duæ hyperbolæ genitæ, habentes vertices in eodem latere F H, æquales sunt inter se, quas vocat Mydorgius subcontrarias. Simili modo duæ aliæ hyperbolæ inter se, & prioribus æquales in eodem cono duci possunt, vertices habentes in latere F I. 10. huius.

e Nec reperitur tertia, cuius vertex sit super aliqua duarum linearum H F, F I, & sit æqualis sectioni A B, quia, &c. *Immutaui particulam, quæ propositionem reddebat falsam, id quod colligitur ex constructione, & progressu demonstrationis: Qualibet enim alia sectio, præter quatuor assignatas, habebit axem æquidistantem alicui rectæ vt F Z, quæ cadit inter F N, & F S; & hac ostendetur inæqualis prædictis sectionibus, & ipsi A B.*

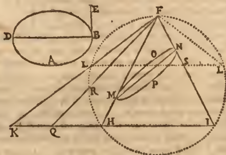
f Deinde ponamus quadratum F G ad G H maius, quàm D B ad B E. Dico, non reperiri in cono H F I sectionem æqualem sectioni A B: nam, si reperiretur, esset vel æqualis parallela suo axi, & erit quadratum N F ad I N in N H, &c. *Legendum esse vt in textu dixi constat ex progressu totius propositionis. Iam facili negotio demonstratio perfici potest, nam axis F G minor est quàm F N, quæ subtendit angulum rectum G, quadratum vero G H semissis totius H I maius est rectangulo I N H, sub inæqualibus segmentis contentum; propterea quadratum F N ad rectangulum I N H maiorem proportionem habebit, quàm quadratum G F ad quadratum G H: estque D B ad B E, vt quadratum F N ad rectangulum I N H; propterea quod F N parallela est axi illius sectionis, quæ posita fuit æqualis A B; igitur D B ad B E maiorem proportionem habet, quàm quadratum F G ad quadratum G H; quod est contra hypothesin: habebat enim quadratum F G ad quadratum G H maiorem proportionem, quàm D B ad B E. Non ergo reperitur in cono; &c.* 12. lib. 1.

Sicuti in præcedenti propositione factum est, nedum in cono recto, sed etiam in quolibet cono scaleno, quomodolibet per axim sectio à triangulo H F I determinari posset, quando, & quomodo in eo designari posset sectio æqualis datæ hyperbolæ A B. Quod ab alijs factum est.

Nota

Notæ in Proposit. XXVIII.

a DEinde sit sectio elliptica, vt A B, & axis eius transuersus B D, & erectus illius B E; & sit triãgulum coni H F I, & circumducamus circa illum circulum, & educamus ex F lineam F L K occurrentem ipsi extra circulum in K; & occurrat circulo in L ita vt sit F K ad K L, vt D B ad B E; & est facile (vti demonstrauimus in 59. ex 1.), &c.

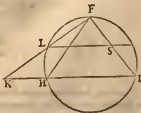


Sensus propositionis hic erit. In cono recto, cuius triangulum per axim H F I reperire sectionem æqualem datæ ellipsi A B, cuius axis transuersus D B, & latus rectum B E. In constructione postea duci debet recta linea F L K extra circulum, & triangulum ad vtrasque partes; alias constructio non esset perfecta.

Lemma verò, quod reposuisse, dicit Arabicus interpres in 1. libro, ab hoc sequenti forsam diuersum non erit.

L E M M A X.

SEcetur latus F I in S, vt sit F I ad I S in eadem ratione, quàm habet axis transuersus D B ad latus rectum B E: & ducatur S L æquidistans trianguli basi H I, quæ secet circulum ex vtraque parte in L, & coniungantur recta linea F L, producanturque quousquè secent basim H I in punctis K.



Quoniam in triangulo F I K ducitur recta linea S L æquidistans basi I K, erit F I ad

erit

I S, vt F K ad K L: sed erat D B ad B E, vt F I ad I S; igitur F K ad K L eandem proportionem habebit: quàm D B ad D E.

b Et educamus in triangulo chordam M N parallelam K F, & æqualem D B, &c. *Non vna, sed duplex rectalinea M N duci potest parallela cuilibet duarum F K, quæ interius subtendat angulum verticis F trianguli H F I per axim ducti. Et potest etiam effici M N æqualis ipsi D B, vt in expositione præcedentis propositionis ostensum est.*

c Itaque planum, transiens per M N, producit in cono H F I sectionem ellipticam æqualem sectioni A B; quia, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, vt sensus perfectus sit.*

d Ergo duæ illæ sectiones sunt æquales, &c. *Concipi debet sectio N O M P, duplex, quia nimirum duæ sectiones sub contraria, æquales sunt, vt facile cum Mydorgio ostendi potest.*

e Et dico, quod non reperiatur in cono H F I sectio elliptica, habens verticem super F I; quia si possibile esset, &c. *Textus valde corruptus exposito modo restitui debere constat ex progressu demonstrationis.*

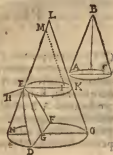
f Et diuidendo F R maior ad minorem R Q est vt F L minor ad maiorem K L, &c. *Supplendæ fuerunt particulæ aliquæ ad tollendam equiuocationem.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Proposit. XXIX. XXX. & XXXI.

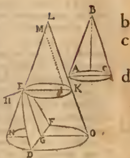
PROPOSITIO XXIX.

Dato cono recto A B C, conum exhibere ei similem, qui datam sectionem D E F contineat, cuius axis E G, & erectus E H; sitque prius sectio parabole.



Super E G educatur planum ad sectionem D E F ad angulos rectos eleuatum, in quo ducatur E I K, quæ contineat cum E G angulum

a æqualem ipsi angulo C: & ponamus E H ad E K, vt A C ad C B, & faciamus super E K triangulum E L K simile triangulo A B C, vt angulus verticalis L æqualis sit angulo B. Faciamus etiam conum, cuius vertex sit L, eiusque basis circulus, cuius diameter sit E K, qui sit eleuatus super triangulum E L K ad angulos rectos; erit igitur angulus E K L æqualis ipsi C, sed



ſed angulus K E G factus fuit etiam eidẽ æqualis; igitur L K, quod eſt latus trianguli per axim coni tranſeuntis, parallelum erit ipſi E G: & propterea planum, in quo eſt ſectio D E F producit in cono ſectionem parabolicam; & quia A C ad C B eſt, vt H E ad E K, & vt E K ad K L; igitur H E ad E L (quæ eſt æqualis ipſi K L) eandem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, nempe ad

11. lib. 1. K L in L E: quapropter H E eſt erectus ſectionis prouenientis in cono, ſed eſt etiam erectus ſectionis D E F; igitur D E F exiſtit in ſuperfi-

Def. 8. huius. cie coni, cuius vertex eſt L, qui ſimilis eſt cono A B C: eo quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo E L K. Dico etiam, quod ſectio D E F contineri non poteſt ab aliquo alio cono, ſimili cono A B C, cuius vertex ſit ex eadẽ parte ſectionis præter conum iam exhibitum. Nam (ſi poſſibile eſt) ſit conus habens verticem M, & triangulum eius erectum ſit ſuper planum ſectionis D E F, & communis ſectio illius, & coni ſectionis erit axis eius; eſtque E G illius axis; ergo hæc eſt abſciſſio communis eorundem planorum; ſed eſt E G abſciſſio communis plani ſectionis, & plani trianguli K E L, ſuper quod eſt etiam erectum; igitur duo triangula E L K, E M

Def. 8. I ſunt in eodem plano, & angulus L æqualis eſt M (propter ſimilitudinẽ duorum conorum); ergo E M eſt indirectum ipſi E L, & educta E K ad

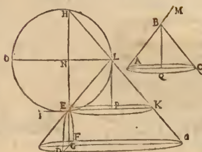
Def. 9. I ſectio D E F continebitur in cono, cuius vertex eſt M: ſi autem ponamus proportionem lineæ alicuius ad E M, eandem quàm habet quadra-

11. lib. 1. tum E I ad I M in M E, linea illa eſſet erectus ſectionis D E F; ſed H E erat erectus ſectionis D E F; igitur H E eſt illa linea, hæc autem ad E L eandem proportionem habebat, quàm quadratum E K ad K L in L E; ergo quadratum E K ad K L in L E eandem proportionem habet, quàm quadratũ E I ad I M in M E; igitur H E ad E M, & ad E L eandem proportionem habet: quod eſt abſurdum. Non ergo in aliquo alio cono ſectio contineri poteſt, vt diximus. Et hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO XXX.

SI ſectio hyperbolica D E F, cuius axis E G inclinatus E H, & erectus E I (oportet autem, vt quadratum axis B Q coni recti ad quadratũ ſemidiametri baſis illius A Q non maiorẽ proportionẽ habeat, quàm habent figuræ latera). Et habeat prius eandem proportionẽ, quàm H E ad E I, & producamus A B ad M, & ſuper H E in plano erecto ad ſectionẽ D E F deſcribamus ſegmentũ circuli E L H, quod capiat angulum æqualem angulo M B C, & biſariam ſecemus arcum E O H in O, & educamus perpendicularem O N ſuper H E; & producamus illam, quouſque occur-

rat



rat circumferentiæ in L, & iungamus E L, & L H, quæ occurrat in K perpendiculari ex puncto E super lineam E H. Et quia E K parallela est L O erit angulus K æqualis H L O, qui est semissis anguli H L E, & hic est æqualis duobus angulis K, K E L; igitur sunt æquales; quare K L E est æquicrus, & angulus K L E æqualis est A B C; quia angulus H L E
c æqualis est M B C; quapropter K L E simile est A B C, quia æqualia crura etiam habet! Si autem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum illius trianguli erectum ad planum D E F; vtique planum sectionis producit in cono hyperbolen, cuius axis E G, inclinatus E H; eo quod si educamus L P, B Q perpendiculares in duobus triangulis, habebit quadratum B Q ad C Q in Q A (quod est vt H E ad E I) eandem proportionem, quàm quadratum L P ad P K in P E: quare potentes æductæ in illa sectione ad axim E G, poterunt comparata, applicata ad E I erectum; sed potentes, eductæ in sectione D E F, 12. lib. 1.
possunt quoque illa applicata; ergo sectio D E F æqualis est sectioni, prouenienti in cono, cuius vertex est L, & existit in eodem plano, habetque eundem axim: quare conus, cuius vertex L continet sectionem Defin.9.
D E F, & est similis cono A B C.

Dico rursus, quod nullus alius conus similis cono A B C, cuius vertex sit in ea parte, in qua est L, præter iam dictum, continebit hanc
d eandem sectionem. Si enim hoc verum non est, contineat illam alius conus similis cono A B C, cuius vertex R in plano L E G; atque latera illius sint E R, R T. Quia angulus E R T æqualis est E L K, & eorum consequentes æquales inter se in eodem circuli segmento E L H existentes, eo quod T R producta occurrit axi transuerso E H in H, & iungamus R O, & ex E educamus E T, quæ sit parallela coniunctæ rectæ lineæ O R; vnde angulus O R H æqualis est O R E) propter æqualitatem arcuum suorum, & sunt æquales duobus angulis R T E, R E T, ergo E R T est æquicrus, & angulus T R E æqualis est A B C: educatur iam R S parallela H E, tunc quadratum R S ad T S in S E eandem proportionem habebit, quàm E H inclinatus sectionis D E F ad E I erectum illius; eo quod sectionem D E F continet conus, cuius vertex est R; sed H E ad

E I eandem proportionẽ habet, quàm quadratum B Q ad C Q in Q A:
eſtq; C Q æqualis Q A, atq; T S æqualis S E, & T S ad S E eandẽ pro- e
portionẽ habet, quã T R ad R H, ſeu quàm E V ad V H; igitur E V æqua-
lis eſt V H; quod eſt abſurdum; propterea quo L O diameter, quæ ad illã
perpendicularis eſt, bifariam ſecat eam in N. Oſtenſum igitur eſt, non repe-
riri conum alium continentem ſectionem D E F, præter ſuperius expoſi-
tum. Tandem ſupponamus, quadratum B Q ad quadratum Q A habere
minorem proportionem, quàm E H ad E I. Patet quadratum L P, nẽ- f
pe N E, ſeu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N
L, ſcilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad
E I: ponamus iam O N ad N X, vt H E ad E I, & per X ducamus R
X Y parallelam H E, & iungamus E R, O R, & H R producatur ad T
quouſque ſecet E T parallelam ipſi O R. Oſtendetur (quemadmodum g
ſupra dictum eſt) quod E T R, B A C ſunt iſoſcelia, & ſimilia. Et quia
E H ad E I eſt vt O N ad N X; nempe vt O V ad V R, nempe vt O V
in V R, quod eſt æquale ipſi E V in V H ad quadratum V R; hæc au-
tem proportio componitur ex E V, nempe S R ad V R, nempe ad E S,
& ex proportione V H ad V R, nempe S R ad S T, ex quibus compo-
nitur proportio quadrati R S ad S T in S E; igitur quadratum R S ad E
S in S T eandẽ proportionem habet, quàm H E ad E I; & propterea
planum ſectionis D E F in cono, cuius vertex eſt R, & illius trianguli
latera R E, R T, producit ſectionem hyperbolicam, cuius inclinatus eſt
E H, & erectus E I; quare conus cuius vertex eſt R, continet ſectionẽ D E
F, nec non continet illam alius conus, huic cono ſimilis, cuius vertex
eſt Y; & hi duo coni ſunt ſimiles cono A B C, nec continet illam ter-
tius alius conus, qui ſimilis ſit cono A B C, nam (ſi hoc ſieri poſſibile
eſt) contineat illam alius conus, cuius vertex Z, & punctum verticis
illius incidet in arcum E L H, & iungamus O Z, quæ ſecet H E in *e*: h

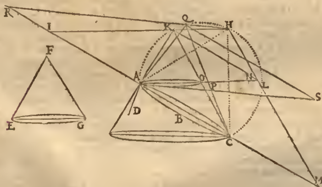
Inde

Inde demonſtrabitur, quod H E ad E I habebit neceſſario eandem proportionem, quàm O e ad e Z; quod eſt abſurdum, quia haberet eandem proportionem, quàm O N ad N X. Quapropter non continet illam tertius alius conus ſimilis cono A B C.

Supponamus iam, quadratum B Q ad quadratum Q A maiorem proportionem habere, quàm H E ad E I. Dico, exhiberi non poſſe conum
i ſimilem cono A B C, qui contineat ſectionem D E F. Alioquin contineat illam conus, cuius vertex eſt R, & demonſtrabitur, quod O V ad V R ſit, vt H E ad E I, quæ habet minorem proportionem, quàm quadratum B Q ad quadratum Q A, quæ oſtenſa eſt eadem, quàm O N ad N L; ergo O V ad V R; nempe O N ad N X minorem, proportionem habet, quàm eadē O N ad N L, quod eſt abſurdum. Non igitur continebit ſectionem D E F conus ſimilis cono A B C. Vt propoſitū fuerat.

PROPOSITIO XXXI.

a SIt tandem ſectio elliptica A B C, eiuſque tranſuerſus axis A C, & erectus A D, & in plano perpendiculariter erecto ad ſectionis planum A B C, fiat ſuper A C ſegmentum circuli, quod capiat angulum



æqualem angulo F, eumque bifariam diuidamus in H, & iungamus A H, C H, & ex H educamus H I, quæ ſecet circulum in K, & occurrat ſubtenſæ extra circulum in I; ſitque H I ad I K, vt A C ad A D: & educamus H L M eaſdem conditiones habens; & iungamus C K, A K, Lem. 10. huius.
b ducaturque K N parallela A C, & A N parallela H I, quæ ſecet K C in O, Quia H I in I K (quod eſt æquale ipſi C I in A I ad quadratum I K) eſt vt A C ed A D; & proportio C I in A I ad quadratum I K componitur ex ratione C I ad I K, nempe K N ad N O (propter ſimilitudinem

tudinem duorum triangulorum), & ex ratione A I, nempe K N ad I K, nempe ad A N (propter parallelas), & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati K N ad A N in N O; ergo quadratum K N ad A N in N O eandem proportionem habet, quàm A C transuersus ad A D erectum; igitur planum, in quo est sectio A B C, in cono cuius vertex est K, & basis circulus, cuius diameter A O producit sectionem ellipticam, cuius transuersus est A C, & erectus A D: quare sectionem B A C continet; & quia angulus H K C, nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A, remanet angulus H C A æqualis O A K; eritque H C A, quod simile est F E G, simile quoque O K A; quapropter O K A isosceleum, & simile est ipsi F E G; igitur conus, cuius vertex est K, similis est dato cono F E G, & quidem continet sectionem A B C, vti diximus. Similiter quoque ostendemus, quod eandem sectionem continebit alius conus, cuius vertex est L, si educantur A L, L C. Et alius conus, præter hos duos, iuxta hanc hypothesin non continebit illam: Alioquin contineat illam alius conus, cuius vertex sit Q, & triangulum A Q P: & ostendetur, quemadmodum supra dictum est, quod communis sectio plani, per axim illius coni ducti, erecti ad planum sectionis A B C, & plani sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, & sit Q, ducamus per H Q rectam H R, & iungamus C Q, A Q, & educamus A S parallelam H Q R, & Q S parallelam A C, erit Q A P triangulum illius coni, & est isosceleum, erit quadratum Q S ad A S in S P, vt C R in R A; quod est æquale ipsi H R in R Q ad quadratum R Q, nempe H R ad R Q; ergo H R ad R Q est, vt A C ad A D, quæ est, vt H I ad I K; ergo diuidendo permutandoq; H K maior ad H Q minorem, eandem proportionem habebit, quàm K I minor ad R Q maiorem: & hoc est absurdum. Non ergo reperiri potest tertius conus, continens sectionem B A C. Et hoc erat ostendendum.

[Margin notes: 13. & 54. lib. 1. — Defin. 9. huius. — Defin. 8. huius. — c — d — e]

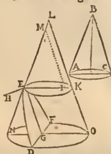
Notę

Notæ in Proposit. XXIX.

a ET faciamus super E K triangulum simile triangulo A B C, &c. *Nimirum, fiat angulus K E L æqualis angulo A, & angulus L fiat aqualis angulo B.*

b Ergo L K, quæ est latus trianguli transeuntis per axim E G parallelũ est E G, &c. *Legi debet, vt in textu videre est. Hoc constat ex constructione; nam duo anguli alterni G E K,, & L K E æquales sunt eidem angulo C.*

c Et propterea planum, in quo est sectio D E F producit in cono sectionem parabolicam, &c. *Quoniam planum circuli, cuius diameter E K perpendiculare est ad planum trianguli L E K: igitur si ducatur planum N F O æquidistans circulo E K secans planum D E F in recta linea D G F, erit quoque circulus, & perpendicularis ad planum triãguli per axim L E K: sed ex constructione planum D E F perpendiculare quoque erat ad idem triangulum per axim E L K; igitur D F communis sectio eorundem planorum perpendicularis quoque erit ad idem planum L N O, & efficiet angulos rectos cum diametro circuli N O, & cum E G, quæ in eodẽ plano existunt, & cũ illo conueniunt in puncto G; suntq; E G, & L O parallelæ: igitur planum sectionis D E F producit necessariò in cono L N O producto parabolam.* 11. lib. 1.



d Igitur H E ad E L, quæ est æqualis ipsi L K eamdem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, &c. *Quoniam conus L E K similis est cono recto A B C erit quoque rectus: & propterea duo latera trianguli per axim E L, & L K aqualia erunt inter se, & ideo E K ad K L, atque ad E L eandem proportionem habebit, &c.*

e Et dico, quod sectio D E F non reperitur in alio cono simili cono A B C, cuius vertex sit ex parte plani sectionis præter hunc conum, &c. *Idest. Nullus alius conus rectus continebit eandem parabolam D E F, qui sit similis cono A B C, & vertex E parabole magis, aut minus recedat à vertice coni, quàm E L.*

f Ergo E M est indirectum ipsi E L, &c. *Quia D G basis sectionis conicæ perpendicularis esse debet ad G O, & ad G E, & ideo ad triangulum per axim vtriusque coni recti L E K, & M E I; & conueniunt plana eorundem triangulorum in E G axi conica sectionis geniti ab eis; ergo dicta triangula in eodem plano existunt per rectas E G, & G O ducto; & in vtroquè cono triangulorum per axes latera L K, & M I parallela sunt eidem axi E G paraboles: ergo L K, M I parallelæ sunt inter se, & anguli L, & M aquales sunt propter similitudinem triangulorum per axes in conis similibus: igitur L E, & M E sunt quoq; parallela, & conueniunt in E vertice paraboles; ergo in directum sunt constituta.*

Notæ in Proposit. XXX.

ITa vt non sit proportio quadrati axis coni, B Q ad quadratum semi- a
diametri basis illius vt C Q minor proportione figuræ sectionis, &c.
Rursus datus sit conus rectus A B C, cuius axis B Q semidiameter circuli basis sit C Q, exhiberi debet alius conus similis dato, qui datam hyperbolen D E F contineat; oportet autem, vt quadratum axis coni B Q ad quadratum semidiametri illius Q A non habeat maiorem proportionem, quàm habet axis transuersus H E ad latus rectum E I.

Et producamus L H ad E I occurret in K perpendiculari rectæ ad pun- b
ctum E linea H, &c. *Idest si ducatur recta linea E K in plano circuli H L E perpendicularis ad H E, seu parallela ipsi L N coniuncta recta linea H L secabit reliquam æquidistantium E K in K.*

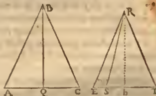
Quapropter K L E simile est A B C, quia æquicrus etiam est: si au- c
tem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum trianguli illius erectum ad planum D E F; vtique planum, quod est in sectione producit in cono sectionẽ hyperbolicã, cuius axis E G, & inclinatus E H, &c. *Quoniam in duobus triangulis A B C, & E L K sunt anguli verticales B, & L æquales inter se, cũ externi M B C, & H L E æquales facti sint; & angulus H L N æqualis sit interno, & opposito K, & angulus N L E æqualis est alterno angulo L E K propter parallelas N L, E K, & quilibet eorũ est medietas externi anguli H L E; ergo angulus K æqualis erit angulo L E K, & triangulũ L E K erit isosceliũ, sed triangulum A B C per axim coni recti ductum est quoque isoscelium; igitur duo anguli supra basim A, & C æquales sunt inter se; erant autem prius verticales anguli B, & L æquales; igitur triangula A B C, & E L K æquiangula, & similia sunt. Ducatur postea recta linea L P perpendicularis ad basim E K, quæ eam secabit bifariam in P, & ducatur planum per E K perpendiculare ad planum E L K, & in eo diametro E K fiat circulus, qui sit basis coni, cuius vertex L, & ducatur planum F D a æquidistans plano circuli E K; efficietur*

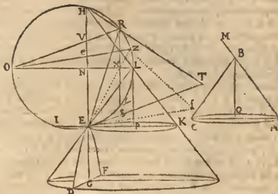
alius

alius circulus F D a perpendicularis ad planum trianguli per axim L E K; erat autem ex constructione planum hyperboles D E F perpendiculare ad idem planum per axim E L K; igitur duorum planorum communis sectio, qua sit F G D perpendicularis quoque erit ad planum trianguli L E K: & ideo efficies angulos F G E, & F G a rectos, & G E H producta subtendis angulum externum trianguli conici E L K; quapropter planum D E F efficiet in cono E L K hyperbolen, cuius axis transuersus erit H E.

d Alias contineat illam alius conus similis cono A B C, sitque vertex eius R in plano L E G, & duo latera trianguli illius sint E R, T R; ergo angulus E R T æqualis est E L K, & est in circumferentia arcus E L H; ergo T R si producatur, occurret H: &c. *Sensus huius textus corrupti talis est: Si enim fieri potest, vt aliquis alius conus, vt E R T, qui similis sit cono A B C, vel E L K, contineat eandem hyperbolam D E F, & conorum vertices R, & L ad easdem partes tendant, erunt duo plana triangulorum per axes conorum ducta perpendicularia ad planum sectionis D E F; alias E G non esset axis hyperbole D E F; Et quia coni supponuntur similes erunt quoque triangula per axes E L K, & E R T similia inter se; & ideo anguli verticales E L K, & E R T aquales inter se erunt, atque subsequentes anguli E L H, & E R H aquales quoque inter se erunt, & subtendunt commune latus transuersum H E; igitur duo anguli E L H, & E R H in eodem circuli segmento consistunt. Textus igitur corrigi debebat vt dictum est.* ex Def. 8.

e Atque T S æqualis est ipsi E, & T S ad S E est, vt T R ad R H, quæ est vt E V ad V N; ergo E V æqualis est V H, &c. *In duobus triangulis isosceliis inter se similibus A B C, & E R T ab aqualibus angulis verticalibus A B C, & E R T ducuntur recta linea B Q, R S secantes bases in Q, & S: estque quadratum R S ad rectangulum E S T, vt quadratum B Q ad rectangulum A Q C, & secatur A C bifariam in Q; ostendendum est E T in duas partes aquales in S quoque secari. Si enim hoc verum non est E T in alio puncto bifariam diuidetur vt in* b *iungaturque R* b. *Quoniam à verticibus triangulorum A B C, & R E T isoscelium ducuntur recta linea B Q, R* b *diuidentes bases bifariam in Q,* b, *ergo anguli ad Q, &* b *sunt recti, & erant anguli A, & E aquales (propter similitudinem eorundem triangulorum) igitur triangula A B Q, & E R* b *similia sunt, ideoq; B Q ad Q A erit vt R* b *ad* b *E, & quadratũ B Q ad quadratum Q A erit vt quadratũ R* b *ad quadratũ* b *E; erat autem quadratum R S ad rectangulum E S T vt quadratum B Q ad quadratum Q A; ergo quadratum R* b *ad quadratum* b *E eandem proportionem habet, quàm quadratum R S ad rectangulum E S T; estque quadratum R* b *minus quadrato R S (cum perpendicularis R* b *minor sit quàm R S) quarè quadratum ex* b *E semisse totius E T minus erit rectangulo E S T sub segmentis inaqualibus eiusdem E T contento; quod est absurdum: quarè necessario E T bifariam secatur in S. Postea propter parallela R S, & H E, vt T S ad S E ita erit T R ad R H; & propter parallelas R V, & E T erit E V ad V H, vt T R ad R H, seu T S ad S E: ostensa autem fuit T S aqualis S E; igitur E V aqua-*





V æqualis est V H, quod est absurdum.

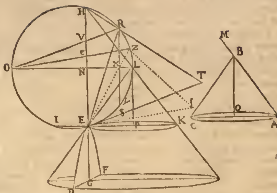
Patet quadratum L P nempe N E, seu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, scilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I: ponamus iam O N ad Z X, vt H E ad E I; & per X ducamus X R, & iungamus E R, &c. *Supposita constructione prioris casus, quandò conus rectus E L K factus est similis cono A B C quadratum L P ad quadratum E P habebat eandem proportionem, quàm O N ad N L, seu quàm quadratum B Q ad quadratum Q A: modò in hac altera suppositione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I; igitur O N ad N L minorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; & fiat O N ad N X vt H E ad E I, erit N X minor quàm N L, & ideo punctum X intra circulum cadet, & per X ducta R X T parallela H E; vtique secabit circulum in duobus punctis, vt in R, & T. Quod verò recta R X T duci debeat parallela ipsi H E, non quomodocunque, patet ex contextu sequenti, nam debent O X, O R secari in N, & V proportionaliter, quarè textus debuit omnino corrigi.* f

Ostendetur, quemadmodum dictum est, quod E T R, & A B C sunt isoscelia, & similia, &c. *Quoniam arcus circuli E O, & O H æquales sunt inter se ex constructione, erunt anguli E R O, & O R H æquales inter se, & propter parallelas O R, & E T est angulus O R E æqualis alterno T E R; atque externus H R O æqualis est interno, & opposito R T E; igitur duo anguli R E T, & R T E æquales sunt inter se; & propterea triangulum E R T erit isoscelium. Rursus quia duo anguli E L H, E R H in eodem circuli segmento constituti æquales sunt inter se, & erat ex constructione angulus M B C æqualis angulo H L E; igitur anguli H R E, & M B C æquales sunt inter se, & ideo consequentes anguli verticales E R T, & A B C æquales erunt inter se, est quoque triangulum A B C per axim coni recti isoscelium igitur duo triangula E R T, & A B C similia sunt inter se. Et quia vt dictum est O N ad N X eandem proportionem habet, quàm H E ad E I, atque propter parallelas V N, & R X est O V ad V R vt O N ad N X, & sumpta cõmuni altitudine V R erit rectan-* g

rectangulum O V R ad quadratum V R, vt H E ad E I : est verò rectangulum H V E æquale rectangulo O V R (propterea quod duæ rectæ lineæ O R, H E se se secant intra circulum in V) igitur rectangulum H V E ad quadratum V R eandē proportionē habet quàm H E ad E I; cumq; proportio rectanguli H V E ad quadratum V R composita sit ex duabus rationibus, ipsius E V ad V R, seu R S ad S E, (propter parallelogrammum V E S R), & ex proportione H V ad V R, quæ eadem est proportioni ipsius R S ad S T (propterea quod triangula H V R, & R S T similia constituuntur ab æquidistantibus H V, R S, & V R, S T) quapropter duæ proportiones R S ad S E, & R S ad S T componentes proportionem quadrati R S ad rectangulum E S T eædem sunt rationibus, ex quibus componitur proportio rectanguli H V E ad quadratum V R; & ideo quadratum R S ad rectangulum E S T eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H V E ad quadratum V R, seu eandem quàm habet H E ad E I; igitur si fiat conus, cuius vertex R, & basis circulus diametro E T, cuius planum perpendiculare sit ad planum trianguli E R T, erit triangulum E R T isoscelium per axim prædicti coni extensum, atq; ad ipsum sectionis D E F planum est quoque perpendiculare, & eius axis G E subtendit angulum E R H, qui deinceps est angulo verticis; igitur planum D E F in cono E R T generat hyperbolen, cuius axis inclinatus est E H, & erectus E I: & propterea conus E R T comprehendit hyperbolen D E F. Rursus si recta R X producatur quousque secet peripheriam circuli L E ex altera parte in puncto Y; atque denuò coniungantur rectæ lineæ E Y, & H Y, quæ extendatur quousquè conueniat cum recta linea ex puncto E parallela ipsi O Y in puncto aliquo, quod concipiatur esse d; fieri poterit alius conus (cuius vertex Y, basis circulus diametro E d erectus ad planum trianguli) similis cono E R T, siue A B C: Ostendetur sicuti modo dictum est, quod idem planum H D F efficiet in cono Y d E eandem hyperbolen D E F.

h Inde demonstrabitur quod E H ad E I necesse est, vt habeat eandem proportionem, quàm O e ad e Z : & hoc est absurdum, &c. *quia conus* ∠ *E* f *continet hyperbolen D E F necessariò eius axis transuersus E H subtendet angulum H Z E, qui deinceps est anguli verticis trianguli per axim; & propter similitudinē conorū rectorum, sunt triangula per axes A B C, E R T, & E Z* f *similia inter se, & anguli verticales B,* ∠*, & R æquales erunt inter se; ideo consequentes anguli M B C, & H R E, nec non H Z E æquales erunt inter se, & subtenduntur ab eadem recta linea H E; ergo in eodem circuli segmento consistunt: & propterea punctum Z in circuli peripheria H Z E cadit. Postea (vt in propositione 53. primi libri, & in hac eadem propositione demonstrauit Apollonius) constat quod H E ad E I habet eandem proportionem, quàm O e ad e Z; & prius O V ad V R erat vt H E ad E I; ergo O V ad V R eādem proportionem habet quàm O e ad e Z; sed quia punctum Z non cadit in R, neque in Y alias conus E Z* f *non esset alius à præcedentibus E R T, & E Y d; ergo O e ad e Z non habet eandem proportionem, quàm O V ad V R, quod est absurdum.*

i Et demonstrabitur quod O V ad V R sit vt H E ad E I, &c. *Repetatur denuo constructio primi casus huius propositionis, vt fiat conus rectus L E K similis cono A B C, tunc quidem quadratum L P ad quadratum E P habebit eandem proportionem, quàm O N ad N L, seu quàm quadratum B Q ad*

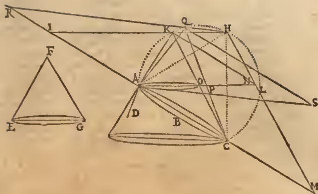


quadratum Q A; sed in hac postrema suppositione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere maiorem proportionem, quàm H E ad E I; igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; sed quia conus E R T ponitur continere sectionem D E F: habebit O V ad V R eandem proportionem, quàm H E ad E I (vt ex 53. primi deducitur, & in hac propositione denuò factum est): igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit quàm O V ad V R; ostensa autem fuit O N ad N X, vt O V ad V R; ergo O N ad N L maiorem proportionem habebit, quàm O N ad N X: quod est absurdum, nam N X minor est, quàm N L.

Notæ in Proposit. XXXI.

DEinde sit sectio elliptica A B C, & transuersa illius A C, & erectus A D, & circunducamus super A C in plano erecto ad sectionis planum A B C segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo F; &c. *Rursus conus exhiberi debet similis cono dato E F G, qui datam ellipsim A B C contineat, sitque axis transuersus ellipsis C A, eiusque latus rectum A D.* a

Quia H I in I K, quod est æquale ipsi C I in I A, ad quadratum I A est, vt A C ad A D, & C I in A I ad quadratum I K nempe K N ad N O propter similitudinem duorum triangulorum, & ex A I, nempe N K ad I K nempe A N vt parallelas constituamus lineas, & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati N K ad A N in N O, &c. *Sensus huius textus valdè corrupti hic est. Quia ex constructione H I ad I K erat vt C A ad A D, & sumpta communi altitudine I K, erit rectangulum* b



lum H I K ad quadratum I K, vt H I ad I K seu vt C A ad A D; estque rectangulum C I A æquale rectangulo H I K; igitur rectangulum C I A ad quadratum I K eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; componitur verò proportio rectanguli C I A ad quadratum I K ex duabus proportionibus laterum C I ad I K, & A I ad I K: & propter parallelas N O, I K, atque K N, & C I, & latus commune C O K duo triangula C I K, & K O N similia sunt; igitur K N ad N O est, vt C I ad I K; & quia in parallelogrammo I N latera opposita sunt æqualia K N ad N A eandem proportionem habebit quàm A I ad I K; quapropter duæ rationes K N ad N O, & K N ad N A componunt proportionem quadrati K N ad rectangulum A N O, quæ eadem est proportioni rectanguli C I A ad quadratum I K; & propterea quadratum K N ad rectangulum A N O eandem proportionem habebit, quàm A G ad A D. Si igitur fiat conus, cuius vertex K basis circulus diametro A O descriptus, cuius planum perpendiculare sit ad planum A K C; atque per rectam A C æquidistantem ipsi K N planum ducatur perpendiculare ad idem planum A K C generabitur ellipsis, cuius axis transuersus erit A C, & latus rectum A D. Textus igitur corrigi debere ex dictis manifestum est.

c Et quia angulus H K C nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A remanet angulus H C A æqualis O A K erit H C A simile F E G simile quoque O K A; ergo, &c. *Quoniam ex constructione segmentum A H C capax est anguli æqualis angulo F erit angulus A H C æqualis angulo F; & quia peripheria A H C secta est bifariam in H; ergo subtensa latera A H, & H C æqualia sunt: & propterea triangulum A H C isoscelium, & simile erit triangulo E F G; propterea quod anguli verticales æquales sunt inter se; sunt verò duo anguli A H C, & A K C in eodem circuli segmento; ergo æquales sunt inter se; pariterque duo anguli C A H, & C K H in eodem circuli segmento constituti, æquales sunt inter se, & propter paralle-*

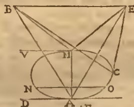
las A O, K H sunt anguli alterni A O K, & H K O aquales inter se; igitur angulus A O K aqualis erit angulo C A H; & propterea in duobus triangulis K A O, & H C A tertius angulus A C H aqualis erit tertio angulo K A O, & propterea triangulum K A O isoscelium, & simile erit triangulo H A C, siuè F G E; igitur conus, cuius vertex K basis circulus A O perpendicularis ad planum trianguli A K O erit conus rectus, & similis cono E F G dato.

Alioquin contineat illum conus alius, cuius vertex sit Q, & triangulum Q A P, & ostendetur quemadmodum dictum est, quod planum transiens per axim illius coni erectum ad planum sectionis A B C sectio communis cum plano sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, &c. *Quia supponitur, quod conus Q A P similis cono E F G contineat ellipsim A B C, cuius axis transuersus C A, & latus rectum A D; igitur triangulum per axim coni ductum Q A P, nedum simile erit triangulo E F G, sed etiam perpendiculare erit ad planum ellipsis A B C, & propterea consistet in plano circularis segmenti A H C pariter erecti ad planum A B C, per idem axim A C extensum, & est angulus A Q C aqualis angulo verticali F propter similitudinem duorum triangulorum, & ex constructione prima partis huius propositionis, est segmentum A H C capax anguli aqualis angulo F; secaturque bifariam in H; igitur angulus A Q C aqualis ipsi F in peripheria segmenti A H C existit. Ducatur postea Q S parallela lateri transuerso ellipsis A C, qua secet basim trianguli per axim Q A P productam in S, & à puncto H bipartita diuisionis segmenti A H C coniungatur recta linea H Q producaturq; quousq; occurrat recta linea C A in R. Quoniã duo anguli A H C, & A Q C in eodẽ circuli segmento constituti aquales sunt inter se; pariterq; duo anguli C A H, & C Q H in eodẽ circuli segmento existentes sunt aquales, & est angulus A P Q aqualis angulo P A Q in triangulo isoscelio Q A P; & angulus P A Q aqualis angulo C A H in triangulis similibus; igitur angulus A P Q aqualis est alterno angulo P Q H; & propterea recta*

recta linea H R parallela est ipsi A S ; & erat prius Q S parallela ipsi C R , & recta linea C P Q est communis ; igitur triangula C R Q , & Q S P similia sunt , & spatium R S parallelogrammum est ; eritque vt prius dictum est proportio quadrati Q S ad rectangulum A S P eadem proportioni rectanguli C R A ad quadratum R Q ; est vero quadratum Q S ad rectangulum A S P , vt ellipsis axis transuersus C A ad eius latus rectum A D , propterea quod conus A Q P supponitur continere ellipsim A B C ; igitur rectangulum C R A ad quadratum R Q eandem proportionem habet , quàm C A ad A D ; est verò rectangulum H R Q aquale rectangulo C R A ; igitur rectangulum H R Q ad quadratum R Q seu H R ad R Q eandem proportionem habebit , quàm C A ad A D ; sed in priori casu facta est H I ad I K in eadem proportione , quàm C A ad A D ; igitur H R ad R Q eandem proportionem habebit quàm H I ad I K .

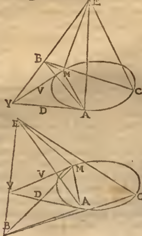
e Ergo diuidendo H K maior ad minorem K I erit vt minor H Q ad maiorem Q R , &c. *Idest quia H R ad R Q est vt H I ad I K , & diuidendo H Q ad Q R eandem proportionem habebit quàm H K ad K I , & permutando H Q ad H K erit vt Q R ad K I : quod est absurdum ; quandoquidem in circulo subtensa H Q à centro remotior minor est , quàm H K , at exterius comprehensa Q R maior est , quàm K I . Quapropter fieri non potest , vt aliquis alius conus A Q P prater iam dictos contineat ellipsim A B C , & sit similis dato cono E F G . Textus ergo confusus corrigi debebat .*

Ad propositionem 77. libri quinti egi de contactibus circulorum , & sectionum conicarum , eorumque admirabilia symptomata à nemine adhuc quod sciam excogitata patefeci , non tamen pradicta disceptatio omnino perfecta , & absoluta fuit : itaque iuxta loci exigentiam hic afferam coronidis loco eiusdem doctrina complementum .

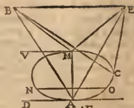


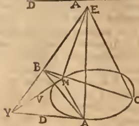
Per rectam lineam coniungentem vertices duorum conorum eandem basim habentium ducere duo plana vtrumque conum tangentia : oportet autem rectam lineam vertices coniungentem extra peripheriam circuli communis basis cadere . PROP. 15. Addit.

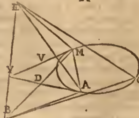
Circulus A M C sit communis basis duorum conorum , quorum vertices B , & E , & coniuncta recta linea B E extra peripheriam circuli A M C cadat : duci debent duo plana tangentia vtrosque conos per eandem rectam lineam B E extensa . Et primo recta linea E B plano circuli A M C aquidistet , & ducto quolibet plano per E B circulum secante in recta linea N O erit ipsa N O parallela E B ; tunc ducatur diameter A M perpendicularis ad N O , & per A , & M ducantur A D , M V tangentes circulum , siue perpendiculares ad idem



idem diametrum M A; erunt igitur tangentes A D, & M V parallelæ eidem N O, erat autem E B parallela ipsi N O; igitur duæ circulum tangentes A B, & M V parallelæ sunt idem E B; & propterea A D, & E B in eodem sunt plano, vtrumque conum tangente, cum per vertices E, & B ducatur, & per A D basis circulum tangentem. Eadem ratione M V, & E B in eodem plano vtrumque conum tangente existent. Si verò recta E B plano circuli non æquidistat producta alicubi planum eiusdem circuli secabit extra circulum ipsum, vt in Y, & tunc quidem à puncto Y extra circulum posito ducantur duæ contingentes Y A, & Y M. Manifestum est, rectas lineas A Y, B E in eodem plano iacere: transit verò prædictum planum per vertices B, & E duorum conorum, atque per Y A tangentem circulum basis communis; igitur planum A E B vtrumque conum contingit. Eodem modo planum E B M ex altera parte vtrumq; conum tanget. Et hoc erat faciendum.

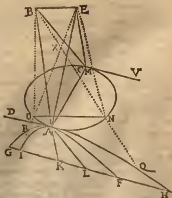






PROP. 16. Addit. *In qualibet conisectione H A I cuius diameter A L non sit axis, per eius verticem A aliam conisectionem in eodem plano describere, quæ priorem abscindat, atque eadem recta linea vtramq; sectionem tangat in puncto mutuæ earum abscissionis.*

Sicut in constructione prop. 11. & 12. addit. factum est, describatur conus B A C comprehendens sectionem H A I, cuius vertex B basis circulus A M C per sectionis verticem A ductus, & triangulum per axim B A C efficiat diametrum A L: & in duobus circulis æquidistantibus A C M, & in eo, qui per sectionis basim H I ducitur idē planum sectionis conica designet duas parallelas A D, H I, & planum trianguli per axim efficiat circulorū diametros C A, & eum, qui per L ducitur æquidistantes inter se: ergo sicuti basis H I perpendicularis est ad circuli diametrum per L ductam, seu ad basim trianguli per axim, ita D A



perpen-

perpendicularis est ad circuli diametrum C A, & propterea A D, planorum H A I, & A C M communis sectio, tanget circulum A C, & ideo superficiem ipsam conicam, & sectionem in ea existentem continget; & diameter A L non erit perpendicularis ad tangentem, seu ordinatim applicatam A D per verticem A, alias A L esset axis, quod non ponitur. Deinde in plano D A B ex A ducatur recta linea A E perpendicularis ad A D supra, vel infra circulum, & vertice quolibet puncto E sumpto in recta linea A E, & basi circulo A C M fiat alter conus E A C, in cuius superficie planũ D A H I designet sectionẽ F A G, & in ea triangulum per axim E A C efficiat diametrum A K: Et quia eadem recta linea D A perpendicularis est ad A C, atque ad A E se secantes in A; ergo D A perpendicularis est ad planum C E A, atque planum D A C extensum per perpendicularem D A, erit quoque perpendiculare ad planum trianguli per axim C E A, quare triangulum per axim efficiet diametrum A K, qua erit

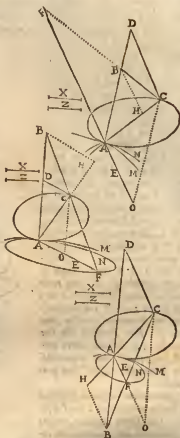
axis sectionis F A G, atque D A perpendicularis erit ad axim A K existentem in plano C E A, ad quod D A est perpendicularis, & cum ea conuenit: quare D A ordinatim ad axim applicata per verticem A tanget sectionem F A G, qua 32.lib. 1.
prius in eodem puncto A tangebat sectionem H A I in eodem plano existentem; & propterea eadem recta A D vtramque sectionem tangit in puncto A. Postea coniungatur recta linea B E, & quia recta linea B A, A D, A E sunt in eodem plano tangente vtrumque conum (cum per vertices B, & E, atque per D A contingentem circulum basis communis ducatur) & E A, & B A angulum constituunt, cum E A posita sit perpendicularis ad D A, at B A ad eandem sit inclinata, & existunt in eodem plano; ergo recta B E parallela est, aut secat contingentem D A extra circulum vt in D. Poterit igitur ex propos. 15. additarum duci per rectam B E planum aliud B E M V vtrumq; conum contingens,

& per

& per rectam B E extendatur aliud planum E N O B inter duo plana contingentia prope verticem A vbicumq; cadens, quod secet vtrumque conum, & circulum basis in recta linea N O, & superficies duorum conorum in lateribus B N Q, E N, B O, E O R, quarum B N occurret semisectioni A H in quolibet eius puncto Q prope verticem A, eo quod portio A H, & peripheria A N C excepto puncto eius A tota inter duo plana conos tangentia intercipiuntur; & eadem ratione E O occurret semisectioni A G in quolibet eius puncto R vltra verticem A ad partes G. Et quoniam in eodem plano trianguli E N B (scilicet plani B N O E secantis vtrumque conum) à puncto E ducitur recta linea E O intra angulum N E B; ergo vlterius producta secabit latus B N subtendentem angulum N E B inter puncta N, & B, vt in X, & propterea recta linea N X intra triãgulum E N O, & ideo intra conum E A C intercepta erit; similiter recta linea O X intra triangulum B N O, & intra conum B A C interclusa erit: quare quodlibet aliud punctũ Q lateris conici B N citra, vel vltra interclusã portionẽ N X cadet necessario extra superficiem coni E A C, & ideo quodlibet punctum Q in productione lateris coni B N sumptum & in semisse sectionis conicæ H A prope verticem A cadet extra semissem sectionis F A, quæ in superficie coni E A C existit, & ad easdem partes vergit. Pari modo quodlibet aliud punctum R lateris conici E O citra, vel vltra interclusam portionẽ X O cadet extra superficiem coni B A C, & ideo quodlibet punctũ R sumptum in medietate sectionis conicæ A G prope verticem A cadet extra medietatem sectionis A I, quæ in superficie coni B A C existit, & ad easdem partes vergit. Igitur sectio H A I abscindit conisectionem F A G in vertice communi A, vbi ambo tanguntur ab eadem recta linea A D. Quod erat faciendum.

PROP. 17. Addit.

Si fuerint quotcunque coni super circulum communem basis descripti, habentes latus commune indefinitè extensum in triangulis per axes ad bases perpendicularibus, atque per terminum lateris communis ducatur planum efficiens coni sectiones tangentes basim: habebunt illæ latera recta æqualia inter se, eritquè sectio singularis, si fuerit parabole, vel circulus: si verò fuerit ellipsis, aut hyperbole erunt infinitæ.

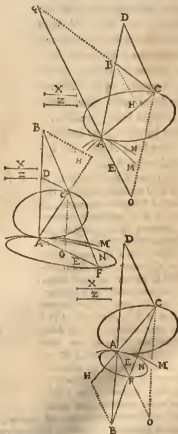


Sit conus A D C singularis, & A B C sit multiplex, habentes circulum A C baseos communem, & latus A B D productum commune sumptum sit in triangulis per axes conorum perpendicularibus ad circulum basis B C, atque à termino A ducatur planũ secans circuli A C planum in recta linea, quæ perpendicularis sit ad diametrum C A, quod efficiat in cono quidem A B C sectionem A N, cuius latus rectum sit X, & latus transuersum A F: in cono verò A D C efficiat sectionem A M, cuius latus rectum Z, & diameter communis A E; sitque sectio A N hyperbole, circulus, aut ellipsis circa axim maiorem, aut minorem; Sectio verò singularis A M in cono D A C sit parabole, & ducatur B H parallela diametro sectionis A E secans circuli diametrum A C in H: & ducatur C O parallela D A secans A E in O. Dico latus rectum Z paraboles A M æquale esse lateri recto X cuiuslibet alterius sectionis A N; & supponantur tres parabolæ A M inter se æquales earumq; latera recta Z æqualia, quæ in tribus figuris apponẽtur, vt confusio euitetur. Quoniam vt latus rectum X ad transuersum A F sectionis A N, ita est rectangulum A H C ad quadratum B H; hæc verò proportio componitur ex ratione C H ad H B, & ex ratione A H ad H B: estque C A ad A F, vt C H ad H B (propter parallelas F A, H B, & similitudinem triangulorum) & vt A H ad H B, ita est A C ad C D, seu ad 12. & 13 lib. 1.

L l A O

A O (cum C D , & H B sint parallelæ, atque D O sit parallelogrammum) componunt verò hæ duæ proportiones rationem quadrati C A ad rectangulum F A O : ergo vt rectangulum A H C ad quadratum H B ; ita est quadratum C A ad rectangulum F A O , & propterea vt X ad A F , ita erit quadratum A C ad rectangulum F A O , sed vt F A ad A D (sumptis æqualibus altitudinibus A O , C D) ita est rectangulum F A O ad rectangulum A D C ; quare ex æquali X ad A D erit vt quadratum A C ad rectangulum A D C ; tandem vt Z latus rectum parabolæs A M ad D A ita est quadratum A C ad rectangulum A D C ; igitur X , & Z ad eandem D A habent eandem proportionem quàm quadratum A C ad rectangulum A D C , & propterea latera recta X , & Z æqualia sunt inter se.

11. lib. 1.



Et quoniam in quolibet casu sectionis conicæ A N latus rectum X semper æquale est Z lateri recto vnius eiusdemq; parabolæs A M ; ergo latera recta X reliquarum omnium sectionum æqualia sunt inter se , licet sectiones illæ sint inæquales , & habeant latera trãsuersa inæqualia , imò neque eiusdem speciei sint . Quod erat propositum .

Admiratione dignum præcipuè est in hac propositione , quod si sectio A N fuerit circulus , vnicus tantummodò erit ; nam circuli latus rectum X æquale erit eius diametro, seu axi transuerso A F ; estque semper latus rectum eiusdem mensuræ , vt ostensum est ; igitur circuli diameter F A idem semper erit ; & propterea circulus , qui à tali plano generari potest singularis erit , nimirum ille , qui in vnico cono A B C efficit triangula per axim similia , & subcontraria B A C , & B F A . Manifestum quoq; est parabolem A M singularem esse , nam supponitur idem circulus basis A C , & in plano per axim coni cõmune latus A D B semper eosdẽ angulos D A E , & D A C efficere conceditur ; igitur vt sectio A M sit parabole necessariò recta à puncto C duci debet parallela diametro parabolæs A E ; cum ergo in triangulo per axim D A C detur basis A C inuariabilis quia circulus vnicus supponitur eius-

que

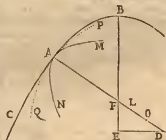
què anguli D, & D A C; dabitur quoq; eius species semper eadem, immo triãgulum per axim inuariabile erit, qui semper eodem modo inclinatur ad circulum basis C A: & propterea conus D A C semper idem erit, & eodem modo sectus, vnde sectio paraboles A M eadem semper omnino erit, habens idem latus rectum Z. In hyperbole verò, aut ellipsi latera C B possunt supra, vel infra C D parallelam ipsi A E à puncto C ductam, extendi, & sic efficientur transuersa latera A F inaequalia inter se, cumque coni sectiones A N habeant latera recta X aequalia inter se, latera verò transuersa A F inaequalia, & hyperbolarum commune latus rectum habentium illa maior est, cuius axis transuersus est minor: & duarum ellipsium commune latus rectum habentium, illa maior est cuius axis transuersus est maior; igitur ellipses, aut hyperbole, quae in conis praedicta lege constructis describuntur non singulares sed infinitae esse possunt. Vbi notandum est, quod ellipses possunt esse ea quae ad maiores, aut ad minores axes adiacent. Pari modo constat quod si in conis superius expositis fiant sectiones conicae constituentur ad eundem axim quinque sectiones commune latus rectum habentes se se in eodem vertice tangentes, & earum intima erit ellipsis, quae ad axim minorem adiacet, & non erit vnica, sed multiplex, & omnes cadent intra circulum, circulus verò intra ellipsim ad axim maiorem accommodatam cadet, haec verò intra parabolen constituetur, & inter circulum, & parabolen infinitae ellipses se in eodem puncto verticis tangentes collocari possunt. Tandem parabole comprahendetur ab infinitis alijs hyperbolis se se in eodem puncto tangentibus.

Maurol. 2. lib. 5. Conic.

Maurol. Prop. 28. lib. 5. Conic.

PROP. 18. Addit. ex 51. 52. lib. 5.

Si in qualibet coniesectione B A C ducatur breuisecans singularis D A, tunc quaelibet alia coniesectio M A N, cuius axis sit eadem breuisecans, & A L semissis erecti eius minor sit eadem singulari breuisecante A D. Dico sectionem M A N interius contingere priorem sectionem B A C in A.



Quia A L minor est, quàm A D sumi poterit recta A O maior quidem quàm A L, & minor quàm A D, & centro O interuallo O A describatur circulus P A Q. Manifestum est, quod circulus P A Q sectionem M A N exterius continget in A, at circulus P A Q interius priorem sectionem B A C tanget, vt ostensum est, igitur coni sectio M A N continget sectionem B A C interius in A. Quod erat ostendendum.

Maurol. pr. 4. 7. 10. 14. lib. 5. Conic. Prop. 12. addit. lib. 5.

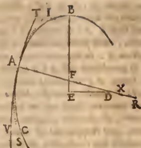
Iisdem positis si sectionis T A V, cuius axis A D semissis eius erecti fuerit A R maior quàm D A, quae est singularis breuisecans sectionis B A C. Dico, quod T A V exterius contingit sectionem B A C in A.

PROP. 19. Add.

Quoniam A R maior ponitur quã A D sumi poterit recta A X minor quidem, quàm A R, sed maior quã A D, & centro X internallo X A describatur circulus I A S. Patet (ex demonstratis superius) circulum I S extrinsecus tangere conisectionem B A C; at sectio T V extrinsecus circulum I S tangit in eodem puncto verticis A, ergo sectio T V extrinsecus tangit conisectionem B A C in eodem puncto A. Quod erat ostendendum.

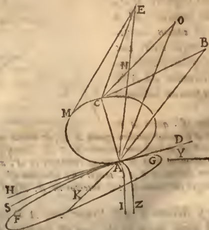
ex pr. 14. addit. lib. 5.

Maurol. pr. 3. 6. 9. 13. lib. 5. Conic.



PROP. 20. Addit. ex 16. addit. huius.

Si in eodem plano circulus F A G secuerit conisectionem H A I in puncto A quod non sit vertex axis eius, atque eadem recta linea D A contingat circulum, & sectionem in eodem puncto A; Dico quod quælibet alia conisectio S A Z in eodem plano cum illis posita cuius axis sit idem circuli diameter A K habens Y semissem lateris recti axis æqualẽ radio circuli F A G: secabit quoque eandem conisectionem H A I in eodem puncto A, atque continget eandem rectam lineam A D in A.



Describantur (vt in 16. additarum huius libri factum est) duo coni A B C, Scalenus comprehendens sectionem H A I, & conus rectus E A C comprehendens circularem subcontrariam sectionem F A G, quorum basis communis sit

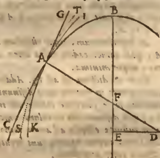
circulus A M C, ita vt idem planum per vertices conorum B, & E, & per A D contingentem eundem circulum basis extensum tangat vtrumque conum in lateribus A B, & A E. Postea si S A Z optatur parabole ducatur in plano A E C ex C recta C N parallela A K axi sectionis F A G; si verò S A Z desideratur hyperbole, aut ellipsis producatur axis A K in directum extra aut intra sectionem, & in recta linea K A O secetur portio A O aequalis lateri transuerso sectionis S A Z, coniungaturque recta linea C O, secans E A in N (eo quod axis K A in plano A E C erecto ad circulũ A M C, existit) & vertice N fiat alter conus N C A. Manifestum est in cono recto E A C designari ab eodem plano D A K circulum F A G, at in cono recto N A C efficietur alia sectio conica circa communem axim A K, quae se se mutuo, & eandem rectam lineam D A tangent, in communi vertice A, atque circuli F A G, & sectionis genita in cono N A C duo latera recta erunt aequalia, & propterea sectionis genita in cono N A C semilatus rectum aequale erit radio circuli T seu dimidio erecti sectionis H A I, & si habuerit latus transuersum erit aequale A O; ergo sectio genita in cono N A C, & sectio S A Z circa communem axim A K habent latus rectum commune duplum ipsius T, & etiam commune latus transuersum A O: Quare sectio genita in cono N A C, & S A Z aequales sunt inter se, & congruentes; quapropter idem planum D A K, quod efficit in cono Scaleno B A C sectionem H A I, designat quoque in cono recto N A C sectionem S A Z: habent verò hi duo coni circulum basis communem, & idem planum per contingentem A D, & per vertices B, & N ductum vtramque conum tangit; igitur (vt demonstratum est in 16. Addit. huius) sectio conica S A Z abscindet aliam sectionem H A I, & ambae tangentur ab eadem recta linea D A in eodem puncto mutuae abscissionis A. Quod erat propositum.

Prop. 17. addit. huius.

10. huius.

PROP. 21. Addit.

Si in qualibet conisectione B A C ducatur breuisecans singularis D A, & qualibet alia conisectio I A K, cuius axis sit D A, atque semissis lateris recti axis sectionis I A K sit aequalis breuisecanti D A. Dico, sectionem I A K contingere eandem rectam lineam G A, quam tangit sectio B A C, & abscindere reliquam conisectionem in eodem puncto A.

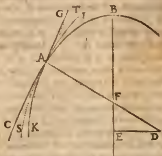


Describatur centro D interuallo D A circulus T A S constat (ex prop. 10. additarum libri quinti) circulum T A S secare conisectionem B A C in A, cumque circa eundem axim D A ponantur circulus T A S, atque conisectio I A K, cuius lateris recti semissis aequalis est D A radio circuli T A S, ergo conisectio I A K abscindit conisectionem B A C in eodem puncto A, in quo secatur à circulo T A S, & tanguntur ab eadem contingente G A in puncto A. Quod erat, &c.

20. add t. huius.

Sectionum

PROP. 22. Addit. *Sectionum conicarum circa axim communem positarum datam coni sectionem abscindentium non in eius vertice, quas omnes eadem recta linea contingat, erunt singulares tantummodo parabolæ, & circulus, ellipses verò, & hyperbole erunt infinitæ.*



Quoniam circa communem axim D A constitui possunt parabola, circulus, Prop. 17. addit huius. *infinita hyperbola, & infinita ellipses habentes semilatus rectum axis aquale singulari breuisecanti D A in sectione* Prop. 21. addit. huius. *conica B A C educto, & hæ omnes abscindunt conisectionem B A C in A. Ergo patet propositum.*

Hinc colligitur dari non posse conisectionem minimam extrinsecus tangentium, neque maximam intrinsecus tãgentium eandem conisectionem in puncto A extra verticem axis posito.

Nam qualibet conisectio, cuius semierectum axis minus est breuisecante singulari D A intrinsecus tangit sectionem Prop. 18. addit. huius. *B A C in A, & si semierectum maius fuerit eadem D A extrinsecus eandem sectionem B A C continget,* Prop. 19. addit. huius. *neque vnquam cessant prædicti contactus extrinseci, vel intrinseci quousque semierectum axis efficitur aquale breuisecanti D A: at tunc, non amplius contingit, sed secat eam in A.* Prop. 21. addit. huius. *Quare patet propositum.*

Constat etiam quod parabolarum vnica tantummodò, & circulorum vnicus etiam abscindit conisectionem B A C in A, & contingit eandem contingentem A G in A.

At hyperbolarum, atque ellipsium abscindentium eandem sectionem B A C in A, quas omnes eadem recta linea A G tangit in A non potest assignari maxima, neque minima.

Nam vt dictum est ad 17. Additarum huius libri infinita hyperbolæ se se contingentes in vertice axis desinunt in parabolam vnicam, & post parabolam interius se se successiuè contingunt infinita ellipses ad axim maiorem adiacentes, quæ desinunt in circulum vnicum, at post circulum interius eum contingunt infinitæ ellipses ad axim minorem adiacentes, quarum omnium semierecta latera axium æqualia sunt breuisecanti singulari D A datæ sectionis B A C. Quare patet propositum.

LIBRI SEXTI FINIS.



APOLLONII PERGAEI

CONICORVM LIB. VII.



DEFINITIONES.

I.



SI diuidatur inclinatum ſecundum proportionem figuræ, aut addatur vni axium ellipſis lineæ, earumque differentia, aut aggregatum ad eandem lineam habeat eandem proportionem figuræ: vocabo homologam inclinati PRÆSECTAM.

II.

Et homologam erecti INTERCEPTAM.

III.

Atque punctum, quod eſt extremum ipſius interceptæ, & diametri: vocabo TERMINVM COMMVNEM.

IV.

Reliquum verò TERMINVM DIVIDENTEM.

V.

Et differentiam, vel ſummam lateris, & interceptæ: vocabo INTERCEPTAM COMPARATAM.

VI.

Differentiam verò, aut ſummam lateris, & præſectę: vocabo PRÆSECTAM COMPARATAM: hoc autem latus refertur ad diametrum, quæ bifariam diuidit lineam coniungentem verticem ſectionis, & terminum potentis huius lateris:

reliquæ

reliquæ verò lineæ referuntur ad hoc latus.

VII.

Insuper vocabo duas diametros coniugatas, & æquales in ellipsi, ÆQVALES.

Et si quidem ad vtrasque partes axis sectionis duæ diametri educantur, quæ ad sua erecta eandem proportionem habeant, vtique vocabo eas ÆQVALES.

VIII.

Diametros verò æquales ad vtrasque partes duarum axium ellipsis cadentes, voco Homologas illius axis: suntque homologæ diametri in ellipsi transuersa ad transuersam, & recta ad rectam.

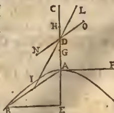
N O T Æ.

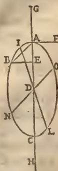
I. P*Rima definitio breuissimè exponi potest hac ratione. Si axis transuersus interius in hyperbola diuidatur, aut exterius in ellipsi, secundum proportionem figuræ, segmentum homologum axis transuersi vocabo Præsectum, vt si fuerit hyperbole, vel ellipsis A B, cuius axis transuersus A C, centrum D, latus rectũ A F, & in hyperbola secetur C A inter vertices A, & C; in ellipsi verò secetur exterius in puncto G, ita vt summa, vel differentia ipsarum G A, & axis C A, idest C G ad G A habeat proportionem figuræ scilicet eandem, quàm habet latus transuersum C A ad latus rectum A F; tunc quidem vocatur recta linea C G Præsecta.*

II. *Atque G A vocatur Intercepta.*

III. *Punctum verò A extremum interceptæ G A, & diametri C A vocabitur terminus communis duarum linearum, scilicet axis C A, & additæ, vel ablatæ A G.*

IV. *Punctum verò G, in quo axis A C interius, vel èxterius diuiditur secundum proportionem figuræ vocatur terminus diuidens; Si verò secetur C H æqualis A G vocabitur etiã C H intercepta, & A H præsecta, atque C terminus communis, & H terminus diuidens.*





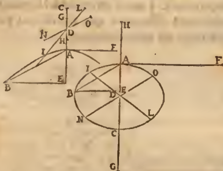
V. *Si diameter I L secuerit bifariam subtensam A B à sectionis vertice A eductam, atque à termino B*

ducatur

ducatur B E perpendicularis ad axim eum secans in E, tunc quidem axis segmentum C E ab opposito vertice C ductum, vocat interpres Latus. Postea summam in prima ellipsi, & differentiam in reliquis figuris lateris C E, & intercepta H C, nimirum ipsam lineam H E, vocat Interceptam comparatam.

VI. *Et lateris C E, & prasecta G C differentia in tribus prioribus figuris, & summa in figura quarta, idest G E, vocatur Prasecta comparata.*

VII. *Ducantur in ellipsi A B C dua diametri coniugata I L, & N O, qua inter se sint aquales. Vel transuersa I L ad eius latus rectum eandem proportionem habeat, quàm eius coniugata N O ad suum latus rectum; tunc quidem vocat pariter diametros coniugatas I L, N O AEquales.*



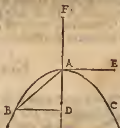
SECTIO PRIMA

Continens Proposit. I. V. & XXIII. Apollonij.

PROPOSITIO I.

SI in parabola A B à termino axis A D educatur recta linea A B subtendens segmentum sectionis A B, & ab eius termino ducatur B D ad axim perpendicularis; vtiquè illa chorda poterit eius abscissam D A in aggregatum abscissæ, & erecti.

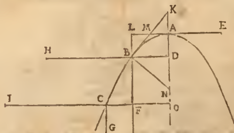
a Fiat A F æqualis erecto A E. Quia quadratum A B est æquale quadrato D A



cum quadrato D B, quod eſt æquale ipſi A D in A F; igitur eſt æquale ipſi F D in D A. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO V. & XXIII.

IN parabola A B C cuiuſcumque diametri B F erectus B H excedit axis A D erectum A E quadruplo abciſſæ A D potentis à termino illius diametri ad axim ductæ 23. & diametri C G, remotioris ab axe, erectus C I maior eſt erecto B H diametri propinquioris B F quadruplo differentiæ axis abſciſſarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum. a

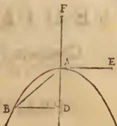


Educamus A L, B K tangentes in A, B, & B N perpendicularem ad
11. lib. 1. B K, erit K D in D N æquale quadrato D B, quod eſt æquale ipſi A E in A D; ergo K D ad D A eandem proportionem habet, quàm A E ad
35. lib. 1. D N: eſtque D K dupla ipſius A D (37. ex 1.) igitur A E eſt dupla ipſius D N; quarè A E cum duplo D K, nempe cum quadruplo A D eſt æqualis duplo K N, nempe B H (eo quod N K ad B K tangentem eandem proportionem habet, quàm aſſumpta M B ad B L coniugatam (57. b
44. lib. 1. ex 1.) (propter ſimilitudinem duorum triangulorum); ergo B H æqualis eſt quadruplo A D cum A E; quarè erectus diametri B F excedit A E quadruplo A D. & A O maior eſt, quàm A D; ergo erectus diametri C G remotioris maior eſt, quàm erectus B F proximioris quadruplo D O differentiæ abſciſſarum. Et hoc erat oſtendendum. c

Notæ in Propoſit. I.

QVia quadratum A B eſt æquale quadrato D A, &c. *Quoniam rectangulum F D A æquale eſt rectangulo F A D ſubſegmentis vna cum quadrato reliqui ſegmenti D A; eſtque latus rectum A E æquale A F;* a

A F; igitur rectangulum F D A aquale est rectangulo D A E vna cum quadrato D A; sed quadratum ordinatim ad axim applicata B D aquale est rectangulo D A E sub abscissa & latere recto contento; igitur rectangulum F D A aquale est duobus quadratis B D, & D A: estquè quadratum A B subtendentis rectum angulum D aquale duobus quadratis B D, & D A; igitur quadratum subtensa A B aquale est rectangulo A D E sub abscissa D A, & sub D F, qua aqualis est eidem abscissa cum latere recto. 11. lib. 1.



Notæ in Proposit. V. & XXIII.

a ET diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior est erecto B H diametri propinquioris B F, &c. *Videtur hac 23. propositio deficiens; cum omnino inuerisimile sit Apollonium non animaduertisse rem adeo facilem; quod nimirum diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior sit erecto B H diametri B F proximioris quadruplo differentia axis abscissarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.*

b Quare A E cum duplo K D, nempe cum quadruplo A D est æqualis duplo K N, nempe dimidio B H, &c. *Quoniam B H latus rectum diametri B F ad duplum contingentis B K est vt M B ad B L, sed (propter aquidistantes, & similitudinem triangulorum L B M, & K N B) vt M B ad B L, ita est duplum N K ad duplum K B; ergo latus rectum B H aquale est duplo K N; sed prius ostensum est quod D A aqualis est medietati ipsius D K, & D N aqualis medietati ipsius A E; igitur duplum K N aquale est duplo K D, seu quadruplo A D cum duplo D N, seu cum A E.* 49. lib. 1. 35. lib. 1.

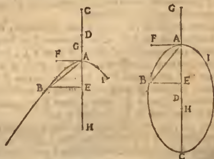
c Et A O maior est, quàm A D; ergo erectus diametri C G remotioris maior est quàm erectus B F proximioris, &c. *Addidi in hac conclusione verba hac (quadruplo D O differētia abscissarum) qua videntur deficere. Manifestum enim est, quod C I latus rectum diametri C G ab axe remotioris superat latus rectum B H diametri F B axi propinquioris quadruplo D O differentia abscissarum axis ab ordinatis à verticibus earūdem diametrorum ductis; nam B H aqualis ostensa est E A vna cum quadruplo A D, eademque ratione C I aqualis est eidem axis lateri recto E A cum quadruplo A O; ergo excessus C I supra B H erit aqualis quadruplo differentia D O.*

SECTIO SECVNDA

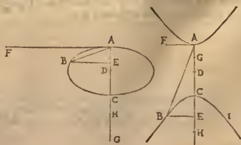
Continens Proposit. II. III. IV. VI. & VII. Apollonij.

PROPOSITIO II. & III.

SI in ſectione A B à termino cõmuni A vtriuslibet interceptæ educatur linea recta A B vſq; ad ſectionem, atquè ab eius termino B ad axim A E ducatur perpendicularis B E; erit quadratum A B ad rectangulum contentum à rectis lineis inter perpendicularis incidentiam, & terminos interceptæ, nempe A E in G E habebit eandem proportionem, quàm habet inclinatus, ſiuè tranſuerſus A C ad præſectam C G. a



Sit itaque A F erectus A C, & ponamus A E in E H æquale quadrato B E; igitur A E in E H ad A E in E C, nempe H E ad E C eſt vt



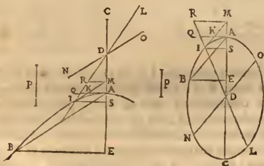
A F

b A F ad A C, & vt A G ad G C; ergo H E ad E C eſt vt A G ad G C; & componendo in hyperbolis, & diuidendo in ellipſibus, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & ſummas homologorum in reliquis, fiet A H ad G E, vt C A ad C G; ergo A H in A E; nempe quadratum A B ad G E in A E eſt vt C A inclinatus, ſiue tranſuerſus ad C G præſectam. Quod fuerat propoſitum.

A.

PROPOSITIO IV.

a SI hyperbolen, aut ellipſin A B tangat recta linea I M in I, & occurrat axi A C in M; vtique ipſius I M quadratum ad quadratum ſemidiametri N D coniugatæ ipſi I L habebit eãdem proportionem, quàm axis contenta M S ad eius inuerſam S D.

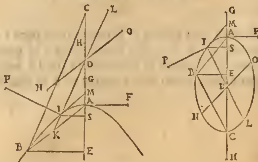


Educantur A Q, M R perpendiculares ad axim vſque ad I L, ponaturque linea P, quæ ad I M eandem proportionem habeat, quàm K I ad Q I, ſeu eandem, quàm habet M I ad I R; Ergo P eſt ſemiſſis erecti 50. lib. 1. diametri I L (52. ex 1.) atque D N dimidium coniugatæ diametri N O poterit P in I D, atque I M poterit P in I R; & ideo I R ad I D, nempe M S contenta ad S D inuerſam eandem proportionem habet, quã quadratum tangentis I M ad quadratum N D ſemiſſis coniugatæ ipſius I L. Et hoc erat propoſitum.

PROP.

PROPOSITIO VI. & VII.

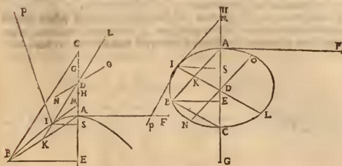
SI in hyperbole, aut ellipsi addantur axi transuerso, vel auferantur ab inclinato duæ interceptæ A G, C H ab eius terminis A, C, atque à vertice sectionis A educatur recta linea A B ad terminum alicuius potentialis B E, & per centrum D a



ducãtur diametri coniugatæ I L, N O, ita vt rectus N O æquidistet ipsi lineæ A B: vtiquè proportio figuræ inclinatæ, vel transuersæ coniugatarum, quæ est eadem proportioni quadrati I L ad quadratum N O, erit quoquè eadem, quàm habent lineæ inter incidentiam illius ordinatim applicatæ ad axim, & terminos diuidentes duarum interceptarũ, scilicet vt H E ad E G.

Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, & A K æqualis K B (eo quod I L cum sit coniugata N O bifariam diuidit A B) erit C B parallela ipsi I D, & propterea M S ad S D, nempè A E ad E C (propter similitudinem triangulorum) est vt quadratum I M ad quadratum N D (4. ex 7.) & quadratum I D ad quadratum I M est vt quadratum C B ad quadratum B A (propter similitudinem triangulorum); ergo proportio quadrati I D ad quadratum N D est composita ex ratione A E ad E C, & ex ratione quadrati C B ad quadratum B A; sed proportio quadrati C B ad quadratum B A est composita ex ratione quadrati C B ad C E in E H, & ex ratione C E in E H ad A E in E G, & ex ratione A E in E G ad quadratum A B; est vero quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H (3. ex 7.) atquè A E in E G ad quadratum A B est vt G C ad C A (2. ex 7.), & proportio C E in E H ad A E in E G, componitur ex ratione C E ad A E, & ex b

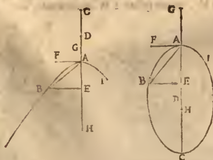
HE



H E ad E G; igitur proportio quadrati I D ad quadratum N D composita est ex proportione C A ad A H, & ex G C ad C A, atque ex C E ad E A, & A E ad E C, & tandem ex H E ad E G; sed C A ad A H, & G C ad C A componunt proportionem C A ad ei æqualem A C: similiter C E ad E A, & A E ad E C est vt E C ad se ipsam: quare si hæ proportiones auferantur, remanebit E H ad E G, vt quadratum I D ad quadratum N D: nempe erit eadem ac proportio figuræ diametri I L. Quod erat ostendendum.

Notæ in Proposit. II. III.

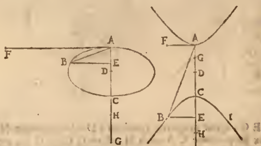
a SI in sectione A B à termino communi A interceptæ, &c. *Addidi particulam* vtriuslibet *intercepta vt propositio efficiatur vniuersalis comprahen-*



tum

dens quartum casum in postrema figura, quàm superaddidi, vti necessariam pro intelligentia octauæ propositionis.

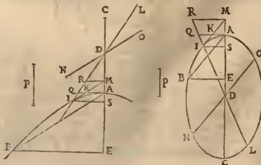
Et componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi prima deindè coniungendo in duabus figuris prioribus, & occurrere faciamus respectiuum cum respectiuo in reliquis figuris post inuersionem, vt fiat, &c. b



Idest componendo in hyperbolis, & in ellipsibus comparando differentias terminorum ad consequentes, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & sumas in reliquis, tunc enim A H ad G E est, vt A C ad C G, & sumpta communi altitudine E A, erit rectangulum H A E ad rectangulum G E A, vt A C ad C G. Sed rectangulum H A E æquale est quadrato A E vna cum rectangulo H E A, cui æquale est quadratum B E, ergo quadratum A B æquale est rectangulo H A E (propterea quod A B subtendit angulum rectum E in triangulo B A E) quare quadratũ A B ad rectangulum A G E eandem proportionẽ habet quàm C A ad C G.

Notæ in Proposit. IV.

SI hyperbolen, aut ellipsim A B tangat recta linea I M, & occurrat axi A C in M, vtique ipsius I M quadratum, &c. *Suppleri debet* a

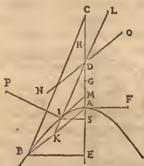


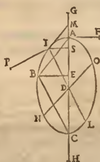
constru-

constructio, quæ deficit in hac propositione, vt nimirum sensus continuatus sit à punctis M, A, I educatur ad axim perpẽdiculares M R, A Q, & I S secãtes diametros in R, Q, & S, & A Q, I M se mutuò secent in K, erit I S ordinatim ad axim applicata, & A Q, sicuti etiam I M contingit sectionem. vocat autem Interpres rectam lineam M S, quæ inter tangentem, & ordinatam interijcitur Contentam, atque D S vocat Inuersam.

Notæ in Proposit. VI. & VII.

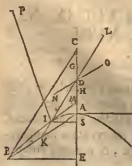
a SI addatur duabus extremitatibus transuersæ, aut insistant ad duas extremitates recti, aut diminuatur à duabus extremitatibus inclinati A,

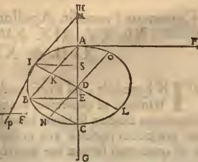




& C duo intercepta, &c. *Expungo verba appostitia: Aut insistat ad duas extremitates recti; quæ sensum perturbant.*

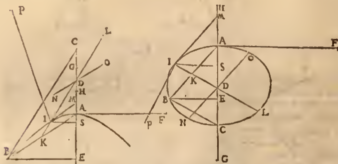
b Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, &c. *Idest Educamus I M contingentem sectionem in I, quæ*





 secet

secet axim in M, & I S ad axim perpendicularem, seu ordinatim applicatam, eum secans in S. Et quia trianguli A C B duo latera A C, A B secantur proportionaliter, scilicet bifariam in D, & K; ergo I D parallela est basi Prop. 5. lib. 2. *C B: estquè tangens I M parallela ipsi B A, cum ambo ad diametrum I L sint ordinatim applicatæ; pariterquè I S parallela est B E (cum sint ad axim perpendiculares) igitur triangula M I S, A B E similia erunt; pariterquè triangula D I S, C B E erunt similia: & ideo M S ad S I erit vt A E ad E B, & S I ad S D erit, vt B E ad E C: quarè ex æquali ordinata M S ad S D eandem proportionem habebit, quàm A E ad E C: estquè quadratum I M ad quadratum N D, vt M S ad S D; ergo quadratum I M ad quadratum N D est,* Prop. 4. huius. *vt A E ad E C, &c.*

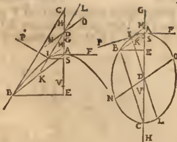


SECTIO TERTIA

Continens Proposit. Apollonij VIII. IX. X. XI. XV. XIX. XVI. XVIII. XVII. & XX.

VIII. IN hyperbola, vel ellipsi quadratum axis inclinati, siue transuersi ad quadratum summæ duarum diametrorum coniugatarum eiusdem sectionis habebit eandem proportionem, quàm productum præfectæ axis in suam interceptam comparatam ad quadratum summæ suæ interceptæ, & potentis comparatarum.

IX. Vel



IX. Vel ad quadratum differẽtiæ coniugatarum eãdem proportionem habet, quàm productum præsectæ in suam interceptam comparatam ad quadratum differentiæ interceptæ, & potentis comparatarum.

X. Vel ad rectangulum sub duabus coniugatis contentum eandem proportionem habet, quàm præsecta axis ad suam potentem comparatam.

XI. Ad summam verò duorum quadratorum ex coniugatis eandem proportionem habet, quàm præsecta ad summam præsectæ, & interceptæ comparatarum.

XV. Sed ad quadratum erecti vnius coniugatæ eandem proportionem habet, quàm præsecta axis in suam interceptam comparatam ad quadratum suæ præsectæ comparatæ.

XIX. Sed ad quadratum differentiæ vnius coniugatarum, & eius erecti eandem proportionem habet, quàm productum præsectę axis illi diametro homologę in suam interceptam comparatam ad quadratum excessus præsectæ, & interceptæ comparatarum.

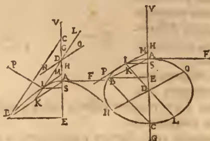
XVI. Ad quadratum verò summæ inclinatæ diametri, & eius erecti eandem proportionem habet, qnàm præsecta axis in suam interceptam comparatam ad quadratum summæ interceptæ, & præsectæ comparatarum.

XVIII. Sed ad figuram inclinatæ vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm axis præsecta ad præsectam comparatam.

XVII. Et ad summam duorum quadratorum inclinatæ, & erecti vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præsecta in interceptam comparatam ad duo quadrata præsectæ, & interceptæ comparatarum.

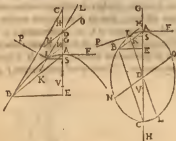
XX. Et tandem ad excessum duorum quadratorum laterum figuræ inclinatæ duarum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm productum præsectæ in interceptam comparatã ad excessum quadratorum præsectæ, & interceptæ comparatarum.

Iisdem figuris manentibus sit H V potens comparata, & I P sit erectũ ipsius I L. Dico quod quadratum A C ad quadratum summæ I L, & N O est vt C G in E H ad quadratum E H V. Quia quadratũ A D æquale a



37. lib. 1. est S D in D M (39. ex 1.) ergo S D in D M ad quadratum I D, nempe E C in C A ad quadratum C B (propter similitudinem triangulorũ) est vt quadratum A D ad quadratum I D, nempe vt quadratum A C ad quadratum I L: estque quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H, seu ad C G (2. 3. ex 7.) idest vt A C in C E ad C G in C E, & permutando; igitur A C in C E ad quadratum C B, quod habebat (vt ostensum est) eandem proportionem, quàm quadratum A C ad quadratum I L, erit vt G C in C E ad C E in E H, nempe vt C G ad E H, seu C G in E H ad quadratum E H; igitur quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in E H ad quadratum E H. Et quadratum I L ad quadratum N O, seu L I ad I P est vt H E ad E G (6. 7. ex 7.) scilicet vt quadratum E H ad H E in E G, quod æquale suppositum fuit quadrato H V; Ideoque I L ad N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad H V; quapropter quadratum I L, siue ad quadratum summæ ipsarum I L, N O est vt quadratum H E ad quadratum E H V; siue ad quadratum differentiæ I L, & N O erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & H V, siue ad I L in N O habebit eandem proportionem, quàm E H ad H V; siue ad duo quadrata I L, N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad summam E H, E G; eo quod quadratum I L ad quadratum N O est vt E H ad E G; siue insuper ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratum E G; vel potius ad quadratum differentiæ I L, & I P erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & E G, vel rursus ad quadratum rectæ lineæ ex L I, & I P compositæ, erit vt quadratum H E ad quadratum summæ duarum H E, E G, atque ad L I in I P eandem proportionem habebit, quàm H E ad E G; vel ad quadratum ipsius L I cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad duo quadrata b

drata H E, & ipsius E G, siue ad differentiam duorum quadratorum L I, & ipsius I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam duorum quadratorum H E, & E G. Et iam ostensum est quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in H E ad quadratum H E; 8. ergo ex æqualitate quadratum A C, siue ad quadratum summæ I L, N O est, vt C G in H E ad qua-
c dratum E H V; 9. siue ad quadratum differentiæ eius, quæ est inter I
d L, N O est vt C G in H E ad quadratum excessus E H supra H V: 10. siue ad I L in N O erit, vt C G ad H V: 11. siue ad duorum quadrato-
e rum I L, N O summam, erit vt
f C G ad summam G E, E H; 12. siue ad quadratum I P erit, vt C G in H E ad quadratum E G:
g 13. siue ad quadratum differentiæ L I, I P erit, vt C G in E H ad quadratum differentiæ H
h E, E G: 14. siue ad quadratum ex recta linea æquali sũmæ duarum L I, I P, erit vt C G in E H ad quadratum ex recta linea composita ex H E, E G:



i 15. siue ad L I in I P erit vt C G ad G E: 16. siue ad duo quadrata ex
k L I, & ex I P erit vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H: 17.
l siue ad differentiam duorum quadratorum ex L I, & ex I P erit vt C G in E H ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G. Et hoc erat propositum.

Notæ in Proposit. VIII.

a Iisdem figuris manentibus sit H V potens comparata, &c. *Præter definitiones superius expositas hic duæ aliæ declarari debent, ignotum enim est quid nam nomine Figura comparata, & Potentis comparata intelligi debeat. Itaq; rectangulum sub præfecta comparata, & intercepta comparata contentum, idest rectangulum H E G vocatur Figura comparata: & si quadratum rectæ lineæ H V æquale fuerit rectangulo H E G vocatur H V Potens comparata.*

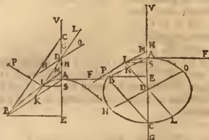
b Ergo S D in D M ad quadratum D I, nempe E C in C A ad quadratũ C E, &c. *Æqualia enim spatia, scilicet rectangulũ S D M, & quadratũ D A ad idem quadratum I D habent eandem proportionem; sed quia triangula M I D, & A B C similia sunt, propterea quod latera homologa sunt parallela inter se; pariterque triangula D S I, & C E B sunt similia, vt ostensum est in 6. & 7. huius; ergo S D ad D I erit vt E C ad C B, atquè M D ad D I est vt A C ad C B erunt compositæ proportiones eædem inter se, scilicet rectangulum S D M ad quadratum D I eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E C A ad quadratum C B; quare vt quadratum A D ad quadratum D I, seu vt quadruplum ad quadruplum, scilicet vt quadratum A C ad quadratum I L, eo quod A D, & I D semisses sunt diametrorum A C, I L.* 37. lib. 1.

Notæ

Notæ in Proposit. IX.

Sive ad quadratum differentiæ eius, quæ est inter I L, N O est vt C G in H E ad quadratum E H, H V, &c. *Licet nouem subsequentes propositiones facile ex octaua deducantur, nequeunt tamen omnes simul conglobatæ vnico haustu deuorari; itaque opere pretium erit aliquantisper breuitatem nimiam Arabici Interpretis relinquere. Tria demonstrata sunt in propositione octaua, quæ in sequentibus nouem propositionibus vsum habent. Primò quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habeat, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum H E. Secundò quod I L ad N O eandem proportionem habeat, quàm H E intercepta comparata ad H V potentem comparatam. Tertio quod quadratum I L ad quadratum N O, seu L I ad eius* c

15. & 16. lib. 1.



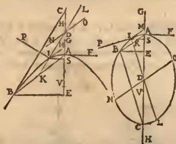
latus rectum I P, sit vt H E ad E G, vel vt quadratum H E ad rectangulum H E G, vel ad quadratū H V. Modo propositio nona sic demonstrabitur. Quia I L ad N O eandem rationem habet quàm H E ad H V, erunt antecedentes ad differentias terminorum proportionales, idest I L ad differentiam ipsarum I L, & N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad differentiam ipsarum E H, & H V: atque quadratum I L ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & N O descriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipsarum E H, & H V descriptum: erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G in H E ad quadratum E H; ergo ex æquali ordinata quadratum A C ad quadratum ex differentia ipsarum I L, & N O descriptum eandem proportionem habebit, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum ex differentia ipsarum E H, & H V.

8. huius.

Notæ

Notæ in Proposit. X.

d Siue ad I L in N O erit vt C G ad H V, &c. *Quia I L ad N O habebat eandem proportionem, quàm E H ad H V positis communibus altitudinibus I L, & E H habebit quadratum I L ad rectangulum I L in N O candẽ proportionem, quàm quadratum E H ad rectangulum E H in H V; sed quadratum A C ad quadratum I L habebat eandem proportionem, quàm rectangulum C G in E H ad quadratum E H; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum sub I L in N O eandem proportionem habet, quàm rectangulum C G in H E ad rectangulum E H in H V, siue quàm habet C G, ad H V.* ex prop. 8. huius.



Notæ in Proposit. XI.

e Siue ad duorum quadratorum I L, N O summam erit vt C G ad summam G E, & E H, &c. *Quia quadratum I L ad quadratum N O erat, vt H E ad E G, antecedentes ad summas terminorum erunt proportionales, scilicet quadratum I L ad quadratum I L simul cum quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad summam ipsarum H E, & E G; erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt C G ad E H; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex N O simul sumpta eandem proportionem habebit, quàm C G, vel H A ad summam ipsarum H E, & G E.* Prop. 8. huius.

Notæ

Notæ in Proposit. XV.

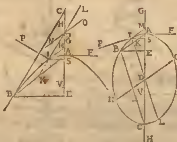
Siue ad quadratum I P erit vt C G in E H ad quadratum E G , &c. *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G ; ergo quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G ; erat autem quadratum A C ad quadratum I L , vt rectangulum C G , seu A H in H E ad quadratum E H ; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum I P eandem proportionem habebit , quàm rectangulum A H E ad quadratum G E .* f

Notæ in Proposit. XIX.

Siue ad quadratum differentiæ I. I , & I P erit vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E , E G , &c. *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G , comparando antecedentes ad terminorum differentias , scilicet I L ad differentiam ipsarum I L , & I P eandem proportionem habebit , quàm E H ad differentiam ipsarum E H , & E G , & quadratum I L ad quadratum ex differentia ipsarum I L , & I P descriptum eandem proportionem habebit , quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipsarum H E , & G E descriptũ: erat autem quadratum C A ad quadratum I L , vt rectangulum A H E ad quadratum H E ; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex differentia ipsarum I L , & I P eandem proportionem habebit , quàm rectangulum A H E ad quadratum ex differentia ipsarum H E , & E G .* g

Notæ in Proposit. XVI.

h S Iue ad quadratum ex recta linea æquali summæ duarum I L, & I P erit, vt C G in H E ad quadratum ex recta linea composita ex H E, E G, &c. *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G comparando, antecedentes ad summas terminorum, erit I L ad I L, & I P simul sumptas, vt H E ad H E, & E G simul sumptas, & quadratum I L ad quadratum ex summa ipsarum I L, & I P descriptum, erit vt quadratum H E ad quadratum ex summa duarum H E, & E G descriptum; & erat prius quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex summa ipsarum I L, & I P descriptum eãdem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex summa ipsarum H E, & E G descriptum.*

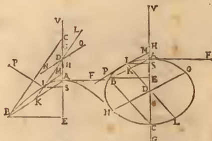


Notæ in Proposit. XVIII.

i S Iue ad I L in I P erit, vt C G in G E, &c. *Quia I L ad I P est vt H E ad G E positis communibus altitudinibus I L, H E habebit quadratum I L ad rectangulum sub I L, & I P eandem proportionem, quàm quadratum H E ad rectangulum H E G: sed quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habebat, quàm rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum L I P eandem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad rectangulum H E G, seu vt A H, vel C G ad G E.*

Notæ in Proposit. XVII.

Siue ad duo quadrata ex I L, & I P erit, vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H, &c. *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G, & quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G: & comparando antecedentes ad terminorũ summas quadratum I L ad quadratum I L vna cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad summam quadrati H E cum quadrato E G: sed prius quadratum A C ad quadratum I L erat vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur quadratum A C ad summam quadrati I L cum quadrato I P eãdem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad quadratum E G vna cum quadrato E H.* k



Notæ in Proposit. XX.

Siue ad differentiam duorum quadratorum I L, I P erit, vt C G in H E ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G, &c. 1
Quoniam vt dictum est quadratum I L ad quadratum I P eandem proportionẽ habet, quàm quadratum H E ad quadratum G E, & comparando antecedentes ad terminorum differentias quadratum I P ad differentiam quadrati I L à quadrato I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam inter quadratum H E, & quadratum E G: estque quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratũ H E; ergo ex aquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex I P differentiam eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratorum ex E G, & ex E H differentiam.

SECTIO QVARTA

Continens Proposit. Apollonij XII. XIII. XXIX. XVII. XXII. XXX. XIV. &XXV.

XII. XIII. XXV. Differentia quadratorum duorum axium hyperboles æqualis est differentiæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

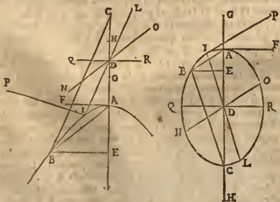
*XXVIIII. Nempe differẽtiæ inter quadrata, à figuris earumdẽ diametrorum æquales sunt.

XXVII. Et differentia duorum axium maior est differentia quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

XXII. Et summa quadratorũ duorum axium ellipsis æqualis est summæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

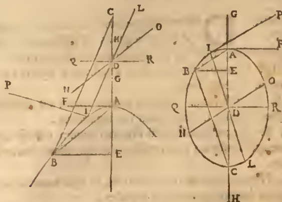
XXX. Nempe summæ quadratorum, & figurarum earundem diametrorum homologarum sunt æquales.

XIIII. Axis verò transuersi quadratũ ad differentiam quadratorum duarum diametrorum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præsecta ad duplam inuersæ.



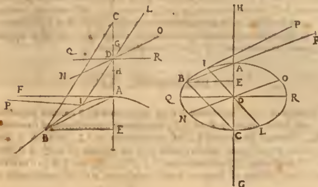
 In

In eiſdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum ſui coniugati a
ex Def. 1. & 2. (in propoſitione 12. 13. 25.) nempe C A ad A F erectum ipſius eſt, vt Præfecta Ç G ad Interceptam G A, ſiue ad C H; ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipſius, & in ellipſi ad eorundem ſummam eandem proportionem habet, quàm C G ad H G. Demonſtratum autem prius fuit, quadratum C A ad quadratum b
I L eandem proportionem habere, quàm C G ad H E, & quadratum



6. & 7. huius. I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; Inſuper quudratum I L ad ſummam quadratorum I L, N O in ellipſi, aut ad eorundem differentiam in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm H E ad H G; & in propoſitione 14. vt H E ad exceſſum H E, E G, quod eſt duplum D G; igitur ex æqualitate quadratum A C, ſiue ad ſummam duorum quadratorum I L, N O, quemadmodum habetur in propoſitione 22. & 30. ſiue ad eorundem differentiam, veluti habetur in propoſitionibus 12. 13. 14. eandem proportionem habebit, quàm C G ad H G, ſiue ad duplum D G, vt in propoſitione 14. & demonſtratum fuit in eadem proportione eſſe quadratum A C ad ſummam quadratorum A C, & eius coniugati, & eſt propoſitio 25. aut ad eorundem differentiam, & eſt propoſitio 12. quapropter ſumma quadratorum I L, N O coniugatarum in ellipſi, nempe quadratum I L vna cum eius figura eſt æquale aggregato quadrati A C vna cum quadrato eius coniugati 30. nempe quadrato A C, & illius figuræ, & in hyperbola differentia quadratorum I L, N O nempe exceſſus quadrati I L ſuper illius figuram æqualis eſt differentiæ duorum quadratorum A C, & recti illius nempe quadrato A C, & illius figuræ 27. & oſtenſum iam eſt, quod I c
L in hyperbola maior eſt, quam A C; ergo differentia A C & illius coniugati maior quàm differentia I L, & N O: atquè ſic oſtendetur, quod dif-

differentia I L, & N O maior ſit, quàm differentia quarumlibet duarum coniugatarum ab axi remotiorum. Et hoc erat oſtendendum.



Notæ in Propoſit. XII.

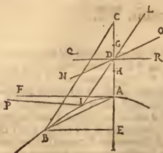
a IN eiſdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum ſui coniugati in propoſitione 12. & 25. nempe A C ad A F erectum ipſius eſt vt præſecta C G ad Interceptam G A, ſeu C H: ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipſius, & in ellipſi ad illorum ſummam eſt, vt C G ad H G, &c. *Ideſt. Quia quadratum A C ad quadratum axis ei coniugati Q R, ſiue C A ad eius erectum A F eandem proportionem habet, quàm præſecta C G ad Interceptam G A, vel ad C H, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in hyperbola, & ad terminorum ſummas in ellipſi, quadratum C A ad differentiam quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R habebit in hyperbola eandem proportionem, quàm C G ad differentiam inter C G, & C H: in ellipſi verò quadratum A C ad ſummam quadratorum ex A C, & ex Q R eandem proportionem habebit, quàm C G ad ſummam ipſius C G cum C H.* Defin. 1. & 2. huius.

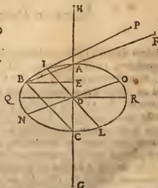
b Et quia iam demonſtratum eſt, quod quadratum C A ad quadratum I L ſit, vt C G ad E H, &c. *Relicta abſtruſa complicatione propoſitionum Arabici Interpretis diſtinctiori methodo, ſicuti in præcedenti ſectione factum eſt propoſitiones declarabimus. Quoniam in hyperbola quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G comparando antecedentes ad terminorum differentias, quadratum I L ad differentiam quadrati I L à quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipſarum H E, & E G differentiam; ſed quadratum A C ad quadratum I L eſt vt C G ad H E (veluti in propoſitione 8. oſtenſum eſt) ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit,* 6. huius.

habebit, quàm C G ad ipsarum H E, & E G differentiam, seu ad H G: sed in eadem hyperbola quadratum A C ad quadratorum A C, & Q R differentiam eandem proportionem habet, quàm C G ad ipsarum C G, & C H differentiam, seu ad H G (veluti in principio huius propositionis dictum est) ergo quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R differentiam, eandem proportionem habebit, quàm ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam; & ideo in hyperbola differentia quadratorum axium A C, & Q R æqualis est differentia quadratorum I L, & N O coniugatarum.

Notæ in Proposit. XIII.

7. huius. *Qvoniam in ellipsi quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad G E; comparando antecedentes ad terminorũ summas quadratum I L ad quadratorum ex I L, & ex N O summam eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipsarum H E, & E G summam: sed quadratum A C ad quadratum I L est, vt C G ad H E (vt in octaua propositione dictum est) ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex*



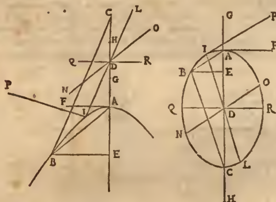


I L, & ex N O summam eandem proportionem habebit, quàm C G ad summam ipsarum H E, & E G, seu ad G H: sed in principio præcedentis notæ ostensum est, quod in ellipsi quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R summam eandem proportionem habet, quàm C G ad summam ipsarum C G, & C H, seu ad G H: quarè quadratum A C eãdem proportionem habet ad summam quadratorum ex C A, & ex Q R, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex N O; & propterea in ellipsi quadrata duorum axium A C, & Q R simul sumpta æqualia sunt quadratis duarum coniugatarum diametrorum I L, & N O simul sumptis.

Notæ

Notæ in Proposit. XXIX.

QVoniam in hyperbola differentia quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R aequalis est differentia inter quadratum I L à quadrato eius coniugata N O; estque Q R media proportionalis inter figuræ latera A C, & A F; ergo rectangulum C A F sub extremis contentum aequale est quadrato intermedia Q R: Et propterea differentia inter quadratum A C, & rectangulum C A F aequalis erit differentiæ inter quadratum A C à quadrato Q R. 12. huius. 16. lib. 1.



Pari ratione erit differentia quadrati I L à rectangulo L I P aequalis differentiæ quadrati I L à quadrato N O; & propterea in hyperbole differentia quadrati axis A C à rectangulo sub figuræ lateribus contentum C A F aequalis est differentia quadrati diametri I L à rectangulo L I P sub lateribus figuræ eius.

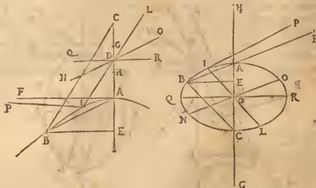
Notæ in Proposit. XXX,

QVoniam in ellipsi quadratorum ex A C, & ex Q R summa aequalis est summæ quadratorum ex I L, & ex N O: estque rectangulum C A F aequale quadrato Q R, & rectangulum L I P aequale quadrato N O (vt in præcedenti nota dictum est) igitur in ellipsi quadratum axis A C, & rectangulum C A F sub eius lateribus cõtentum simul sumpta aequalia sunt quadrato ex I L cum rectangulo figuræ eius L I P. Prop. 13. huius. ex 15. lib. 1.

Notæ

Notæ in Proposit. XIV. & XXV.

QVoniam nedum in hyperbola, sed etiam in ellipsi quadratum A C ad summam quadratorum ex I L, & ex N O eandem proportionem habet, quã A H ad summam ipsarum H E, & E G, atque quadratorum ex I L, & ex N O summa ad eorundem quadratorum differentiam eandem proportionem habet, quàm ipsarum H E, & E G summa ad earundem differentiam;

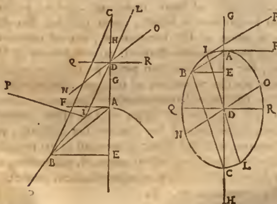


ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habet, quàm C G, siue H A ad ipsarum H E, & E G differentiam; sed in ellipsi ipsarum H E, & E G differentia æqualis est duplo F D; igitur in ellipsi quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit, quàm præsecta C G ad duplum inuersa E D.

Notæ in Proposit. XXVII.

ET ostensum iam est, quod I L in hyperbola maior est, quàm A C; ergo differentia A C, & illius coniugati maior est, quàm differentia homologorum suorum à suis coniugatis, & differentia proximioris homologi ad suam coniugatam maior est differentia remotioris à sua coniugata, &c. *Hoc autem sic demonstrabitur. In diametris A C, & I L producatur A M æqualis Q R, & I K æqualis N O, & ab ijsdem secentur A S æqualis Q R, & I T æqualis N O. Quoniam M S bifariam secatur in A, & ei indirectum* C

indirectum additur S C, erit rectangulum M C S cum quadrato ex A S, seu ex Q R æquale quadrato ipsius A C; ergo rectangulum M C S æquale est differentiæ quadrati A C à quadrato Q R: pari ratione rectangulum K L T vna cum quadrato N O æquale erit quadrato I L: ergo similiter rectangulum K L T æquale est differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; estquè quadratum I L maius quadrato A C, cum diameter I L in hyperbola maior sit, quàm axis C A; igitur rectangulum K L T vna cum quadrato N O maius erit rectangulo M C S vna cum quadrato Q R: est verò rectangulum M C S æquale rectangulo K L T (cum sint differentiæ quadratorum ex coniugatis diametris, quæ in hyperbola ostensæ sunt æquales); ergo quadratum N Prop. 12. huius.



O, scilicet residuum maioris summæ, maius erit quadrato Q R, quod est residuum summæ minoris: & propterea N O maior erit, quàm Q R: erat autem I L maior quàm C A; igitur I L cum N O, seu K L maior erit, quàm A C, & Q R simul, siue quàm M C: sed in rectangulis M C S, & K L T æqualibus, vt K L ad M C, ita reciprocè C S ad L T; igitur C S, seu differentia ipsarum A C, & Q R maior est, quàm L T, seu differentia ipsarum I L, & N O in hyperbola.

Si postea præter I L ponatur alia diameter ab axe remotior cum sua coniugata erit similiter differentia quadratorum ex diametris coniugatis remotioribus ab axi æqualis differentiæ quadratorum axium A C, & Q R, & ideo

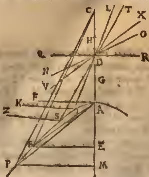
 æqualis

æqualis erit differentia quadratorum ex I L, & ex N O; estque pariter diameter illa remotior ab axe maior quàm I L; ergo simili ratiocinio ostendetur, quod differentia coniugatarum diametrorum ab axe remotiorum minor est, quàm differentia propinquiorum I L, & N O.

SECTIO QVINTA

Continens Proposit. XXI. XXVIII. XXXXII. XXXXIII. XXIV. & XXXVII.

Axes hyperboles si fuerint æquales, tunc quælibet diametri coniugatæ in illa sectione æquales sunt 21. si verò fuerit 28. vnus duorum axium in hyperbola, aut ellipsi maior, a tunc eius diameter homologa maior erit sua coniugata, quousquè ad duas æquales diametros coniugatas in ellipsi perueniatur, & axis maior ad suum coniugatum, siuè ad erectum eius maiorem proportionem habet, quàm quælibet alia diameter eiusdem sectionis ad sibi coniugatam, siue ad eius erectum; eritque proportio maioris diametri axi proximioris ad sibi coniugatam, siue ad eius erectum maior proportione maioris coniugatarum ab illo remotioris ad minorem, siue ad eius erectũ. Et minima figurarum diametrorum erit figura axis inclinati, siue transuersi, & maxima erit figura recti in ellipsi: atque figuræ reliquarum diametrorum (siue diametri sint inclinatæ, vel transuersæ) maiores sunt, quã figuræ diametrorũ ab axi remotiorũ 24. Et in ellipsi erectus axis transuersi minor est, quã erectus cuiuslibet alterius diametri, & erectus proximioris diametri minor est erecto cuiuslibet remotioris 37. Et excessus axis transuersi super eius coniugatum maior est, quã excessus homologarum diametrorum, super suas coniugatas, & excessus proximioris homologæ super suam coniugatam maior est, quàm excessus remotioris super eius coniugatã. Et differentia duorum laterum figuræ axis maior est, quàm



diffe-

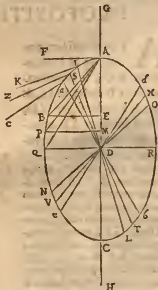
differentia duorum laterum figuræ sui homologi; pariterque proximioris axi homologi differentia duorum laterum figuræ eius maior est, quàm differentia duorum laterum figuræ remotioris.

PROPOSITIO XXI. & XXVIII.

SIt itaque sectio A B P, & duo axes coniugati eius A C, Q R, centrum D; sintque I L, N O duæ aliæ diametri coniugatæ; pariterque S T, V X, & educamus ad axim C A M perpendiculares B E, P M. Dico quod si fuerit A C æqualis Q R; erit quoque I L æqualis ipsi N O, & S T ipsi V X. Si verò fuerit eorum aliquis reliquo maior, vtique eius homologa diameter maior quoque erit sua coniugata, & similiter in reliquis propositionibus.

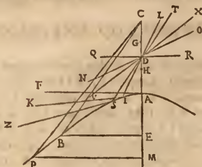
Sit prius alter axis A C maior in prima figura, sed Q R in secunda; sintque A G, C H duæ interceptæ diametri A C. Et quia quadratum A C ad quadratum Q R, nempe A C ad eius erectum est vt A H ad H C, seu ad A G; & habet H A ad A G maiorem proportionem in prima figura, & minorem in secunda, quàm H E ad E G, quæ ostensa est (6. 7. ex 7.) vt quadratum I L ad quadratum N O, nempe I L ad eius erectum. Et similiter proportio illa maior, aut minor est, quàm H M ad M G, quæ est vt quadratum S T ad quadratum V X; igitur A C ad Q R, siue ad erectum ipsius A C in prima maiorem proportionem habet, & in secunda minorem, quàm I L ad NO, siue ad erectum ipsius I L, siue quàm S T ad V X, vel ad erectum ipsius S T; sed quia H E ad E G in prima figura maiorem proportionem, & in secunda minorem, quàm H M ad M G habebit I L ad N O maiorem proportionem in prima, & minorem in secunda, quàm S T ad V X, cumque H E in prima figura sit maior, & in secunda minor, quàm E G, pariterque H M, quàm M G, erit I L in prima maior, & in secunda minor, quàm N O, similiterque S T, quàm V X.

ex Def. 1. huius.



 Deinde

XXI. Deinde sit A C æqualis Q R in hyperbola fiet A C æqualis erecto, & conuenient duo puncta H, & G in puncto D, eritque A C ad b

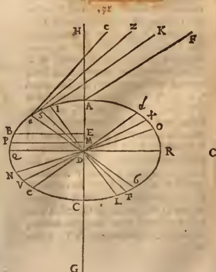


Q R vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, quæ est vt D E ad se ipsam, & hæc ostensa est, vt quadratum I L ad quadratum N O; igitur I L, & N O sunt æquales, & sic demonstrabitur, quod S T, V X sunt æquales, & hoc erat propositum.

Prop.6. huius.

PROPOSITIO XXVI

AT in ellipsi fieri potest, vt H E sit æqualis E G, si nimirum punctum B cadat in Q, & tunc B E cadet super Q D, & erit diameter I L æqualis suæ coniugatæ; & vocabo eas æquales.



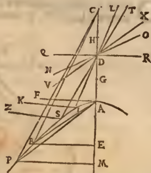
Quia C G ad C H, nempe quadratum A C ad suam figuram maiorem proportionem habet in primis figuris, & minorem in secunda ellipsi, quàm C G ad G E, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipsius I L (18. ex 7.) & C G ad G E in primis figuris maiorem proportionem habet, & in

in secunda ellipsi minorem, quàm C G ad G M, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipsius S T (18. ex 7.) ergo figura ipsius A C est minor; in secunda verò maior quàm figura ipsius I L; & similiter figura ipsius I L maior, aut minor est figura S T. Et hoc est propositum.

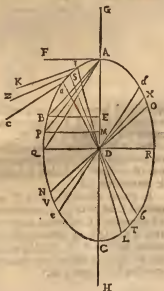
PROPOSITIO XXXXII.

IN hyperbole, & ellipsi sũma duorum axium minor est summa quarumlibet duarum cõiugatarum diametrorum eiusdẽ sectionis.

XXXXIII. Et planum ab eis contentũ minus est plano à duabus coniugatis contento, & planum à proximioribus axi coniugatis contentum minus est plano à remotioribus contento.



Iisdem figuris manentibus, quia in hyperbole A C minor est quàm I L, & I L, quàm S T; & siquidem A C æqualis fuerit Q R, erit quoque I L æqualis N O, & S T æqualis V X (21. ex 7.) ergo summa ipsorum A C, Q R minor est, quã summa I L, N O, & quàm S T, V X: si verò A C non fuerit æqualis ipsi Q R, vtique differentia duorum quadratorum A C, Q R æqualis erit differentiæ quadratorum I L, N O: & propterea summa ipsorum A C, Q R minor erit, quàm summa I L, N O: & hæc summa ex hac eadem demonstratione minor etiam erit, quàm summa duarum S T, V X. At in ellipsi; quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O (28. ex 7.) habebit quadratum ex summa A C, Q R ad earundem duarum summam quadratorum maiorem proportionem, quàm quadratum summæ I L, N O ad quadratorum sum-

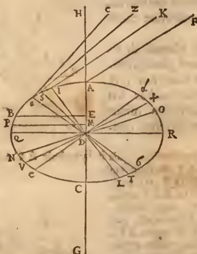


12. 13. huius.

summam earundem: & summa duorum quadratorum ipsarum æqualis est summæ duorum quadratorum A C, Q R (22. ex 7.) ergo summa A C, Q R minor est, quàm summa I L, N O, atque sic ostendetur, quod sũma I L, N O minor est, quàm summa S T, V X. Quod erat propositũ.

PROPOSITIO XXXXIII.

Deinde in ellipsi quadratum summæ A C, Q R minus est quadrato summæ I L, N O; & summa duorum quadratorum A C, Q R



æqualis est summæ duorum quadratorum I L, N O (22. ex 7.) igitur remanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & similiter I L in N O minus erit, quàm S T in V X. f

Sed in hyperbola, quia quilibet axium minor est homologa diametro coniugatarum; igitur planum rectangulum ab axibus contentum minus est eo quod à duabus coniugatis continetur hoc igitur in hyperbole manifestum est.

In ellipsi autem, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet; quàm I L ad N O per conuersionem rationis, & permutando maior A C ad minorem I L minorem proportionem habebit, quàm differentia ipsarum A C, Q R ad differentiam ipsarum I L & N O; & propterea differentia ipsarum A C, & Q R maior erit differentia reliquarum I L, & N O. Et similiter ostendetur, quod excessus I L super N O maior sit, quàm excessus S T super V X. g

PROP.

PROPOSITIO XXIV.

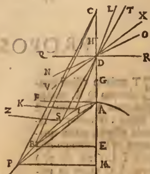
ET quia in ellipsi quadratum Q R, nempe figura axis A C minor est in prima, & maior in secunda ellipsi, qdàm quadratum N O, nempe quã figura I L (28. ex 7.) estque A C maior in prima, & minor in secunda figura quàm I L; igitur erectum ipsius A C minus est in prima figura, & maius in secunda, quàm erectum I L. Et sic ostendetur, quod erexum ipsius I L maius sit, siue minus, quàm erectum S T.

Et quia erectum ipsius A C minus est in prima ellipsi, & maius in secunda, quàm erectum ipsius I L, & A C maior est in prima, & minor in secunda figura quàm I L, igitur differentia A C, eiusq; erecti, quæ sunt duo latera figuræ A C, in quo-

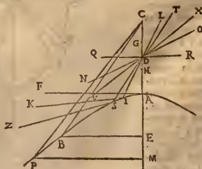
libet casu maior erit differentia I L, eiusque erecti. Pari modo ostendetur quod differentia ipsius I L, & eius erecti maior sit differentia ipsius S T, eiusque erecti. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVII.

IN hyperbole differentia laterum figuræ axis inclinati maior est differentia laterũ figuræ sui homologi eiusdẽ sectionis: & differẽtia laterum figuræ inclinati proximioris axi maior est differentia laterum figuræ inclinati ab illo remotioris.



In hyperbole A B P sit axis C A, & I L, S T sit duæ aliæ diametri, & centrum D; atque erectus ipsius A C sit A F, & ipsius I L sit I K, atque ipsius S T sit S Z: & educamus C B, C P, parallelas duabus homologis diametris I L, S T, & duas ad axim perpendiculares B E, P M, secemusque duas interceptas C H, A G, & sit inclinatus A C in prima figura maior, quàm A F, in secũda verò minor. Et quoniam A C ad A F supponitur vt H A ad A G



erit

erit quadratum A C ad quadratum differentiæ ipsarum A C, A F, vt quadratum H A ad quadratum H G, at ad quadratum differentiæ ipsarum I L, I K est, vt E H in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) ad quadratum verò differentiæ S T, S Z est, vt H M in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) est verò M H in H A maius quàm E H in H A, atque E H in H A maius quàm quadratum H A; igitur A C ad differentiam ipsarum A C, A F minorem proportionem habet, quàm ad differentiam ipsarum I L, I K, & ad differentiam earundem I L, I K minorem proportionem habet, quam ad differentiam ipsarum S T, S Z; igitur differentia ipsarum A C, A F maior est, quàm differentia ipsarum I L, I K; atquè differentia earundem I L, I K maior est quàm differentia S T, S Z. Quod erat propositum.

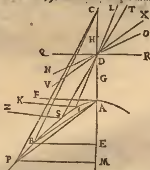
Notæ in Proposit. XXVIII.

Sit in primis figuris axis A C maior, quàm axis Q R. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G: estque G A minor quàm G E; ergo H G ad G A maiorem proportionem habet quàm ad G E: & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi H A ad A G maiorem proportionem habet, quàm H E ad E G; sed H E ad E G eandem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O; ergo quadratum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O: & propterea A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O: & sunt quoquè earundem proportionum duplicata pariter inaquales, nimirum axis A C ad eius latus rectum A F maiorem proportionem habebit, quàm diameter I L ad eius latus rectum I K. Secundò quia G E minor est, quàm G M; ergo H G ad G E maiorem proportionem habet, quàm ad G M; & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi H E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm H M ad M G, & quadratum I L ad quadratum N O habet eandem proportionem, quàm H E ad E G; nec non quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; ergo quadratum I L ad quadratum N O maiorem proportionem habet, quàm quadratum S T ad quadratum V X, & I L ad N O maiorem proportionem habebit, quàm S T ad V X, & earundem proportionum duplicata inaquales quoque erunt, scilicet I L ad eius latus rectum maiorem proportionem habebit, quàm S T ad eius latus rectum. Deindè in secundis figuris sit axis A C minor quàm Q R. Quia H A minor est, quàm H E;

ex 15. 16. lib. 1.

Defin. 1. huius.

6. & 7. huius.



ex 15. 16. huius.

6. & 7. huius.

nec non H E minor quàm H M ergo H A ad eandem H G minorem proportionem habebit, quàm H E, & comparando antecedentes, ad terminorum summas vel ad differentias H A ad A G minorem proportionem habet, quàm H E ad E G, & similiter H E ad E G minorem proportionem habet, quàm H M ad M G: est verò quadratum A C ad quadratum Q R, vt H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O, vt H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X est, vt H M ad M G; & ideo A C ad Q R minorem proportionem habebit, quàm I L ad N O, & I L ad N O minorem proportionem habebit, quàm S T ad V X; & similiter earundem proportionum duplicata eodem ordine inæquales erunt, scilicet AC ad eius latus rectum minorem proportionem habebit quàm I L ad eius rectum latus, &c. Ad perfectionem partis secundæ propositionis 28. requiritur hoc.

Lem. 2. lib. 5.

ex 15. 16. lib. 1. Defin. 1. huius Prop. 7. huius.

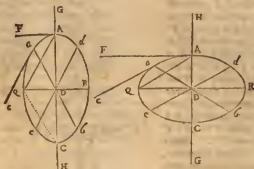
ex 15. 16. lib. 1.

L E M M A. I.

IN ellipsi cuius axes inæquales sunt, duas diametros coniugatas inter se æquales reperire.

In

In eadem figura coniungatur recta linea A Q terminos axium coniungens; & per centrum huic parallela sit e d, *perq; idem centrum, & semipartitionem*

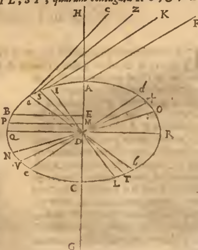


applicata A Q ducatur diameter a b: *Dico diametros coniugatas* a b, *&* e d *aquales esse inter se. Quoniam à termino Q ordinatim applicata A Q ad diametrum* a b *ducitur ad axim perpendicularis Q D cadens in centrum D; ergo H D ad D G eandem proportionem habet, quàm quadratum diametri* a b *ad quadratum eius coniugatæ* c d; *suntquè H D, & G D aquales inter se, cum semiaxes, atquè intercepta sint aquales inter se; ergo diametri coniugatæ* a b, *&* c d *aquales erunt inter se hoc pramisso.* 7. op.7. huius.

Reperiantur in ellipsi dua diametri coniugata inter se aquales a b, e d, *& inter* a, *& A ponantur diametri I L, S T, quarum coniugata N O, & V X, & ducatur reliqua recta linea, vt prius factum est, & ponatur primo loco axis A C maior quàm Q R: Dico I L maiorem esse ipsa N O, & S T maiorem V X. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; sed in prima hyperbola, & prima ellipsi H A maior est, quàm A G, & H E maior, quã E G, atquè H M maior, quàm M G; igitur quadratum I L ma-*

Defin. 1. huius.

Prop.7. huius.



 ius

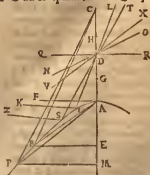
ius est quadrato N O, & quadratum S T maius quadrato V X; ideoquè quando axis A C maior est, quàm Q R, erit diameter I L maior eius coniugata N O, & S T maior quàm V X. Pari ratione, quando axis A C minor est, quàm Q R erit H A minor, quàm A G, & H E minor, quàm E G, atque H M minor, quàm M G: & propterea in secunda hyperbola, & secunda ellipsi etiam diameter I L minor erit, quàm N O, & S T minor erit quàm V X. Idem contingit in reliquis diametris, dummodò in ellipsi cadant inter A, & a, nam a b est æqualis suæ coniugatæ e d: & vltra pũctum a ad partes Q diametri cadentes minores sunt suis coniugatis in prima ellipsi, & maiores in secunda, cum propinquiores sint axi Q R.

Si verò fuerit vnus duorum axium in hyperbola aut ellipsi maior, tunc eius homologa diameter coniugata maior est, &c. *Non nulla in hoc textu deficiunt; non enim omnes diametri in ellipsi sunt inæquales vt in Lemmate 1. ostensum est, & ideo textus corrigi debuit.* a

Notæ in Proposit. XXI.

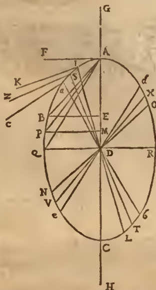
ET conuenient duo puncta H, & G in puncto D; eritque A C ad Q R, vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, &c. *Quia quadratum A C ad quadratum Q R est vt C G ad G A, & vt quadratum I L ad quadratum N O, ita est H E ad E G, nec non quadratum S T ad quadratum V X est vt H M ad M G; sed quandò axium quadrata sunt inter se æqualia, tunc quidem præsecta C G, seu H A æqualis est intercepta G A, & terminus G, seu H cadit in cẽtro D; & ideo H E vel D E æqualis est E G vel E D: pariterq; H M æqualis est M G: quarè coniugatarũ diametrorũ quadrata æqualia sunt inter se, & etiã transuersa latera suis erectis æqualia erunt.* b

Defin. 1. Prop. 7. huius.

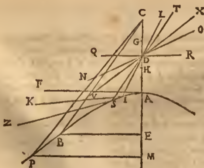


Quia

C Quia C G ad A G, nempe quadratum A C ad suam figuram in maiori, & in figura secunda ellipsi in minori proportione, &c. *Idest. In prima, & secunda figura hyperboles, & in prima figura ellipsis habet C G ad G A maiorem proportionem, quàm ad G E, eo quod G E maior est, quàm G A: at in secunda figura ellipsis proportio minor est; quia G E minor est, quã A G. Propositum verò aliter ostendetur hac ratione.*



Quoniam ex demonstratis in nota proposit. 27. in hyperbola, atquè ex propositione 11. libri quinti in ellipsi erit axis minor, & rectus Q R minor diametro recta N O, & N O minor remotiore V X, ideoquè quadratum Q R minus erit quadrato N O, & quadratum N O minus quàm quadratum V X: est verò figura, seu rectangulum C A F sub extremis contentum aequale quadrato Q R ex media proportionali inter illas descriptum: pariterquè rectangulum L I K aequale est quadrato diametri ei coniugatae N O, nec non rectangulum T S Z aequale erit quadrato V X, ergo rectangulum C A F minus est rectangulo L I K, atque rectangulum L I K minus est rectangulo T S Z. 15. lib. 1.

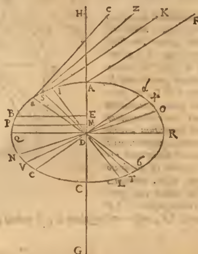


S Z. E contra in ellipsi secunda. Quia Q R maior est, quàm N O, & hac maior, quàm V X; ergo rectangulum C A F maius est rectangulo L I K, & hoc maius erit rectangulo T S Z.

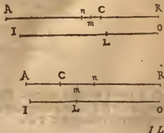
Notæ in Proposit. XXXXII.

ERit igitur aggregatum A C, Q R minus quàm aggregatum I L, N O, &c. *Hoc ostensum est in nota proposit. 27. huius.* d

At in ellipsi, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, erit quadratum aggregati A C, Q R ad summam duorum e



quadratorum ipsarum in maiori proportione, quàm quadratum aggregati I L, N O ad summam duorum quadratorum earundem, & summa duorum quadratorum ipsarum, &c. *Fiat A R æqualis duabus A C & Q R, I O fiat æqualis duabus I L, & N O; atquè secetur A R in* m, *vt sit A* m
Prop. 21. huius. *ad* m *R, vt I L ad L O. Quia in prima ellipsi A C ad Q R, vel ad C R (in hac figura) maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, seu ad L O (in præsenti figura); Ergo A C ad C R maiorem proportionem habet, quàm*
Lem. 2. lib. 5. *A* m *ad* m *R; ideoq; A C ad eandem A R maiorem proportionem habebit quàm A* m*; & propterea A* m *minor erit, quàm A C: sed A* m *maior est quàm M R, eo quod I L priori homologa maior est, quàm L O: at in secunda ellipsi A C ad C R minorem proportionem habet, quàm*



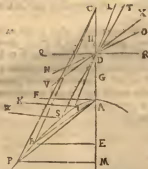
I L

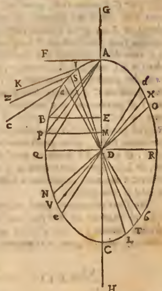
I L ad L O, seu quàm A m *ad* m *R; & A C ad eandem A R minorem proportionem habet quàm A* m*; ideoque A C minor erit, quàm A* m*, & A* m *minor quàm* m *R, sicuti I L minor est, quàm L O; & propterea secta A R bifariam in* n *in vtroq; casu C* n *semidifferentia maximè, & minimè scilicet A C, & C R maior erit, quàm* m n *semidifferentia inaequalium intermediarum A* m*, & R* m*: suntque duo quadrata ex A C, & ex C R aequalia quadratis ex R* n*, & ex C* n *bis sumptis, atque quadrata ex A* m*, & ex R* m *aequalia sunt quadratis ex R* n*, & ex* m n *bis sumptis, sed duplum quadrati* n *C cum duplo quadrati* n *R maiora sunt duplo quadrati* n m *cum duplo quadrati* n *R (cum* n *R sit communis, &* n *C maior sit* n m*); igitur in vtroque casu duo quadrata ex maxima, & ex minima, scilicet quadratum A C vna cum quadrato C R maiora sunt quadrato A* m*, & quadrato* m *R simul sumptis: & quadratum A R minorem proportionem habet ad summam quadratorum ex A C, & ex C R, quàm ad summam quadrati A* m*, & quadrati* m *R; sed quadratum I O ad quadratum I L vna cum quadrato L O eandem proportionem habet, quàm quadratum A R ad summam duorum quadratorum ex A* m*, & ex* m *R (propterea quod A R, & I O diuiduntur proportionaliter in* m*, & L): igitur quadratum A R ad summam quadrati A C vna cum quadrato C R minorem proportionem habet, quàm quadratum I O ad summam quadrati I L cum quadrato L O.* Lem. 2. lib. 5.

Non secus ostendetur, quod quadratum summae I L, & N O ad quadrati ex I L, & quadrati ex N O summam habet minorem proportionem, quàm quadratum summae S T, & V X ad quadratorum ex S T, atque ex V X summam: & ideo I L cum N O minores erunt, quàm S T cum V X. ex 22. huius.

Notæ in Proposit. XXXXIII.

f REmanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & pariter I L in N O minus quàm S T in V X, &c. *Quia si ex quadrato summae A C, & Q R auferantur duo quadrata ex C A, & ex Q R simul sumpta, remanent duo rectangula sub C A, & Q R contenta: pariterque duplum rectanguli ex I L in N O est residuum quadrati ex summa ipsarum I L, & N O descripti, postquàm ablata sunt quadratum ex I L, & quadratum ex N O simul; sed bina quadrata vtrinq; ablata sunt aequalia inter se in ellipsi; & summa A C, Q R minor est quàm summa I L, N O; Ergo duplum rectanguli sub C A & sub Q R minus est duplo rectanguli I L in N O, & rectangulum sub A C, & Q R minus est rectangulo sub I L, & N O.* Prop. 12. huius. Prop. 42. huius.



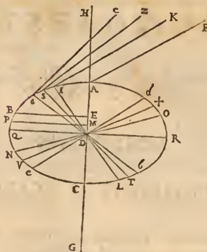


QVia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O post cõuersionem rationis, & permutationem A C maior ad I L, minorem, habebit proportionem minorem, quàm excessus A C super Q R ad excessum I L super N O, &c. *Hoc quidem verum est in ellipsi, (veluti dictum est ad propos. 28. huius) quandò maior axis est A C, sed quandò A C est minor, atque A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O, opere pratium erit, demonstrare, quod tunc etiam differentia axium A C, & Q R maior sit differentia diametrorum I L, & N O. Quoniam existente C A minore, quàm Q R (ex 28. huius) A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O; & inuertendo Q R ad A C maiorem proportionem habebit, quàm N O ad I L, & per conuersionẽ rationis Q R ad differentiam ipsarum Q R, & A C minorem proportionem habebit, quàm N O ad differentiam ipsarum N O, & I L; & permutando Q R maior ad minorem N O habebit proportionem minorem, quàm differentia ipsarum Q R, & A C ad differentiam ipsarum N O, & I L: & propterea differentia ipsarum Q R, & A C maior erit, quàm differentia ipsarum N O, & I L.*

28. huius. *Postea quandò C A est maior axis, tunc I L ad N O maiorem proportionem habet, quàm S T ad V X; & similiter per conuersionem rationis, & permutando maior I L ad minorem S D habebit minorem proportionem, quàm differentia coniugatarum diametrorum I L, & N O ad differentiam coniugatarum S T, & V X, quapropter axi propinquiorum diametrorum I L, & N O differentia maior erit, quàm remotiorum coniugatarum S T, & V X differentia.*

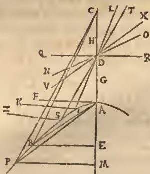
E contra quandò C A est axis minor idem concludetur, vti paulo ante factum est.

Notæ



Notæ in Proposit. XXIV.

h Igitur erectum ipsius A C minus est in prima, & maius in secunda, quàm I L, & sic ostendetur, quod erectum ipsius I L maius sit, siue minus quàm erectum S T, &c. *Quoniam in prima ellipsi rectangulum C A F minus est rectangulo L I K; ergo A C ad I L minorem proportionem habet reciproce, quã I K ad A F; quare I K ad aliquam aliam quantitatem maiorem, quàm A F eandem proportionem habebit, quàm A C ad I L; estquè A C maior quàm I L in prima ellipsi; ergo multò magis I K maior erit quàm A F. Pari ratione in eadem prima ellipsi rectangulum L I K minus est rectangulo T S Z, & I L axi maiori propinquior maior est, quàm S T; ergo S Z maior erit, quàm I K.* Prop. 28. huius.



E contra in secunda ellipsi rectangulum L I K minus erit rectangulo C A F; & rectangulum T S Z minus erit rectangulo L I K; estquè T S maior quàm I L, & I L maior, quàm A C; igitur reciprocè A F maior erit, quàm I K, & I K maior, quàm S Z. Ibidem.

SECTIO SEXTA

Continens Proposit. XXXIII. XXXIV. XXXV. & XXXVI.



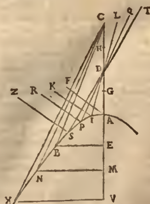
PROPOSITIO XXXIII.

Axis inclinatus si non fuerit minor dimidio sui erecti, vtique eius erectus minor est erecto cæterarum diametrorum inclinatarum eiusdem sectionis, & axi proximioris inclinati erectus minor est, quàm erectus remotioris.

XXXV. Et si fuerit axis inclinatus minor dimidio erecti, vtique ad vtrasque eius partes cadent duæ inclinatæ, quarum quælibet æqualis est semissi erecti ipsius, atque eius erectus minor est erecto cuiuslibet inclinati ad vtrasque partes eius positæ, & erectus proximioris minor est erecto remotioris.

In hyperbole A B N sint A C, I L, P Q, S T diametri inclinatæ, & A F sit erectus ipsius A C, I K ipsius I L, P R ipsius P Q, & S Z ipsius S T: sitque axis A C non minor medietate ipsius A F. Dico, quod A F minor est, quàm I K, & I K minor quàm P R, & P R minor quàm S Z. Educantur C B parallela I L, & C N ipsi P Q. & C X ipsi S T: & ducantur B E, N M, X V perpendiculares ad axim C A E. Quoniam si A C æqualis est ipsi A F, etiam I L æqualis est ipsi I K (21. ex 7.) & P Q ipsi P R; estque A C minor quam I L, & I L, quàm P Q; ergo

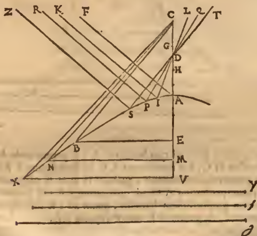
ex 38. lib. 5.



ergo A F minor est, quàm I K, & I K minor quàm P R. Si verò A C maior est, quàm A F esset I L maior, quàm I K: & I L ad I K minorem proportionem habebit, quàm A C ad A F (28. ex 7.) & I L maior est quàm A C; igitur A F minor est, quàm I K: atquè similiter patebit I K minorem esse quàm P R, & P R, quàm S Z. 21. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

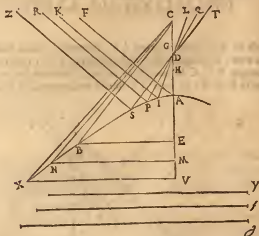
Deinde sit A C minor, quàm A F, dummodò minor non sit dimidio eius: & secentur duæ præsectæ A H, C G, quæ erunt æquales; pariterque A G, C H interceptæ æquales; ponaturque linea y æqualis summæ G E, G A. Et quia A G non est maior duplo A H, & y maior



est duplo A G, erit y in A H maius, quàm quadratū A G; igitur y in A E ad y in A H, nempe E A ad A H minorem proportionē habebit, quā y in A E ad quadratum A G; ideoquè E H ad H A, nēpe E H in H A ad quadratum A H minorē proportionē habebit, quàm y, seu eidem æquales E G, G A in A E, cum quadrato A G (quæ sunt æqualia quadrato G E) ad quadratum A G; ergo E H in H A ad quadratum E G, seu (vt ostensum est in 15. ex 7.) quadratum A C ad quadratum I K minorem proportionem habebit, quàm quadratum A H ad quadratū A G, seu quā quadratum A C ad quadratum A F. Igitur A C ad I K minorem proportionem habet, quàm ad A F; & propterea A F minor est quàm I K.

 Simili

Simili modo oſtendetur quod I K minor ſit, quàm P R: etenim ſi ponatur linea *f* æqualis ſummæ M G, G E: cum G E non ſit maior duplo E H, & *f* maior ſit duplo G E; igitur *f* in E H maius eſt quadrato G E. Poſtea oſtendetur (quemadmodum antea dictum eſt) quod M H ad H E, nempe M H in H A ad E H in H A minorem proportionem habet



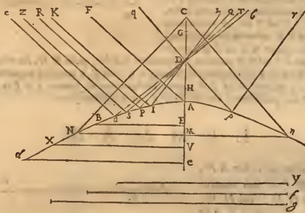
quàm quadratum M G ad quadratum G E; & permutando M H in H A ad quadratum M G, ſeu quadratum A C ad quadratum P R (15. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum G E, nempe quàm quadratum A C ad quadratum I K: & propterea A C ad P R minorem proportionem habebit, quàm ad I K; ideoquè I K minor eſt, quàm P R: & pariter P R minor, quàm S Z.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Sit poſtea A C minor dimidio A F; erit A G maior duplo A H, & ideo H G maior eſt, quàm H A: ponatur iam H M æqualis H G, ducaturque ad axim perpendicularis N M; iungaturque N C, & educatur diameter P Q parallela N C. Et quia M H medietas eſt ipſius M G, erit P Q dimidium ipſius P R (6. ex 7.) Inter duas diametros P Q, A C ducatur diameter I L, & C B ei parallela, & ad axim perpendicularis B E. Quoniam M H in H E minus eſt quadrato H G; addito communi

producto

producto ex G E, & G H in E H, erit M H in H E cum E G, atquè G H in H E, nempe summa M G, G E, quæ est æqualis ipsi f in E H minus erit, quàm quadratum H G cum aggregato E G, G H in E H, quæ sunt æqualia quadrato G E; igitur f in E H minus est quadrato E G. Postea vti prius dictum est ostendetur, quod quadratum A C ad quadratum P R maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum I K: & propterea P R minor est, quàm I K. Non aliter ostendetur quod I K minor sit, quàm A F. Ponatur postea diameter S T extra locum inter P Q, A C compræhensum, ducaturque C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V. Igitur V H M maius erit quàm quadratum H G,



& eodem modo procedendo, tandem ostendetur quod quadratum A C ad quadratum S Z minorem proportionem habet, quàm ad quadratum P R, & ideo P R minor erit quàm S Z. Non secus ostendetur quod S Z minor est erecto cuiuslibet inclinati cadentis ad partem S T extra illam. Itaque demonstratum est, quod P R minor sit erecto cuiuslibet diametri sectionis cadentis ad vtrasque partes ipsius P Q versus A, & X, & erecti proximiores diametro P Q minores sunt remotioribus. Et hoc erat propositum.

In Sectionem VI.

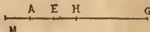
IN Expositione sequentium Propositionum difficultas, quæ à nimia prolixitate oritur, incuitabilis est, nisi Methodus in textu seruata aliquantisper relinquatur: propterea non nulla lemmata præmittam, ex quibus semel demonstratis casus omnes sequentium propositionum facillime, & breuissime deducuntur.

Lemma

LEMMA II.

SI recta linea H G producatur in A & E, ita vt A H, paritérque E H, non maior sit H G: Dico rectangulum ex A G E summa inæqualium segmentorum in E H intermediam sectionem, minus esse quadrato ex segmento intermedio minore E G.

Fiat H M æqualis H G, & quia A E æqualis, aut minor est, quàm M E; & E G maior, quàm E H, ergo A E ad M E minorem proportionem habet, quàm E G ad E H, & permutando A E ad E G minorem proportionem habebit, quàm M E ad E H, & cõponendo A G ad G E minorem proportionem habebit, quàm M H, seu ei æqualis G H ad H E, & iterum componendo A G E ad G E minorem proportionem habebit, quàm G E ad E H: quare Rectangulum ex summa A G E in H E minus erit quadrato ex intermedia G E, vt propositum fuerat.



LEMMA III.

ISdem positis sint A H, & E H non minores quàm G H, vel H M: Dico rectangulum ex A G E in E H maius esse quadrato ex E G.



Quia A G maior est quàm E G, & G H non maior ipsa H E, ergo A G ad G E maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, & componendo A G E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo rectangulum ex A G E in E H maius erit quadrato ex G E.

LEMMA IV.

ISdem positis sit A H maior, sed E H minor eadem M H semisse totius M G: Dico quod si proportio ipsius A G ad G E fuerit eadem rationi G H ad H E, erit



rectan-

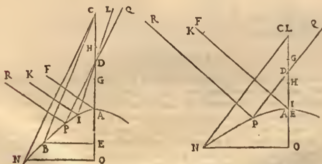
rectangulum sub A G E in E H æquale quadrato ex G E, & si proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadrato; & si illa proportio minor fuerit, Rectangulum quadrato minus erit.

Et primo, quia A G ad G E ponitur vt G H ad H E; componendo A G E ad G E, erit vt G E ad E H, & rectangulum sub extremis contentum, nimirum sub A G E in E H, æquale erit quadrato ex intermedia G E.

Secundo, si A G ad G E maiorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, componendo A G E ad G E maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo Rectangulum sub A G E in E H maius erit quadrato ex G E. pari ratione si A G ad G E minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, ostendetur Rectangulum ex A G E in E H minus quadrato G E.

LEMMA V.

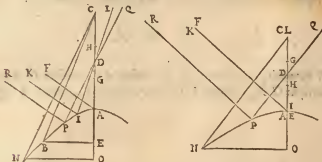
IN hyperbola, cuius axis C A, & erectus A F, præsecta H A, intercepta G A, diameter L I, cuius erectus I K, latus C E, &



diameter Q P, cuius erectus P R, latus C O: Dico quod erectus P R ab ipso erecto I K, vel ab A F atque rectangulum sub O G E in G H ab ipso quadrato G E, vel rectangulum ex O G A in A H ab ipso quadrato G A, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et primo ponatur rectangulum sub O G E in E H æquale quadrato E G, ergo idem rectangulum sub O G E in E O ad rectangulum sub E G O in E H, seu E O ad E H eandem proportionem habet, quàm ad quadratum G E, & propterea E O ad E H erit vt rectangulum sub E G O in E O ad quadratum E G,

G E, & componendo O H ad E H, seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A, erit vt rectangulum sub G E, & G O in O E vna cum quadrato E G, seu vt quadratum ex O G ad quadratum ex G E, & permutando rectangulum A H O ad quadratum O G, erit vt rectangulum E H A ad quadratum G
15. huius. *B, sed vt rectangulum O H A ad quadratum O G, ita est quadratum A C ad*
ex Def. & *quadratum P K, & vt rectangulum E H A ad quadratum ex G E, seu vt*
15. huius. *quadratum A C ad quadratum A F, vel ex I K; quapropter idem quadratum A C ad quadratum ex P K, atque ad quadratum ex A F vel I K eandem proportionem habet, & ideo quadrata ipsa æqualia sunt, & eorum latera P K; & A F, vel I K pariter æqualia erunt.*



Eodem modo quando rectangulum sub O G E in E H maius est quadrato G E, tunc quidem idem rectangulum, cuius altitudo O G E, basis vero O E, ad rectangulum, cuius altitudo O G E, basis verò E H, seu O E ad E H, minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum E G, & componendo, atque permutando, vt prius factum est, habebit rectangulum O H A ad quadratum O G, siue quadratum A C ad quadratum P K minorem proportionem, quàm
15. huius. *rectangulum E H A ad quadratum G E, seu quàm quadratum A C ad quadratum A F, vel I K, & propterea P K maior erit, quàm A F, vel I K.*

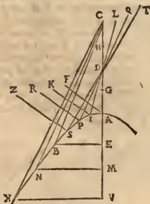
Quando verò rectangulum sub E G O in E H minus est quadrato E G, tunc quidem ostendetur eodem progressu quadratum P K minus esse quadrato A F, vel I K, quod erat propositum.

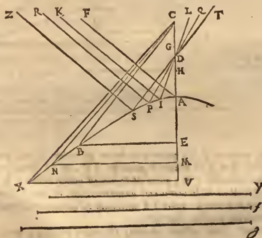
Notæ in Propos. XXXIII. & XXXIV.

Def. 2. huius. QVoniam ex hypotesi C A minor non est medietate ipsius A F, estque A H ad A G, vt C A, ad A F, ergo A H maior, aut æqualis est medietati ipsius A G, & ideo A H maior, aut æqualis est residuo H G, quare E H,

E H , atque eius portio A H non minores sunt eadem G H ; ergo rectangulum sub E G A in A H maius erit quadrato A G , atque I K maior erit quàm A F . Lem. 3. huius. Lem. 5.

Simili modo , quia tam M H , quam E H excedunt ipsam G H , erit rectangulum sub M G E in E H maius quadrato A G , atque P R maior , quam I K . Lem. 3. huius. Lem. 5. huius.





Notæ in Proposit. XXXV.

QVia ex hypotesi axis A C minor est semi A F , erit A H minor medietate ipsius A G , & ideo A H minor erit H G : fiat igitur M H æqualis H G , & per M (quæ intra sectionẽ cadet) ad axim ordinatim applicata

 duca-

ducatur N n occurrens sectioni in N, & n, à quibus iungantur N C, n C, & eis æquidistantes diametri P Q, & p q extendantur, quarũ erecta P R, & p r. Ostendendum est P Q subduplam esse ipsius P R, atq; P R, & p r æquales esse inter se, & minima esse erectorum quarumlibet Diametrorum eiusdem sectionis. Prop.6. huius. *Quoniam vt H M ad M G ita est P Q ad P R, & p q ad p r, erat autem H M subdupla ipsius M G, ergo Diameter P Q subdupla est erecti eius P R, pariterque p q subdupla est ipsius p r: atque Diametri P Q, & p q æquales sunt inter se, cum æque recedant ab axi A C, atque earum commune latus sit C M. Postea quia tam E H, quàm M H maiores non sunt eadem H M, vel* Lem. 2. huius. *G H, ergo rectangulum sub M G E in E H minus est quadrato E G, & ex lem. 5. P R minor est I K.*

Lem. 2. & 5. hui. *Similiter quia tam E H, quàm A H minor est eadem H M, ergo rectangulum sub E G A in A H minus est quadrato A G, & I K minor erit, quàm A F. tandem, quia tam V H, quàm M H non est minor eadem G H, ergo re-* Lem. 3. *ctangulum V G M in M H maius erit quadrato G M, & ideo S Z maior erit,* Lem. 5. *quàm P R, & sic vlterius: quare P R minimum est laterum rectorum quarumlibet Diametrorum eiusdem hyperboles.*

PROP. 1. Addit. *In hyperbole latus rectum alicuius Diametri reperire, quod æquale sit lateri recto axis; sed oportet, vt axis transuersus A C minor sit medietate eius erecti A F.*

ex 35. hu. *Reperiatur Diameter P Q, quæ subdupla sit eius erecti P R, sitque C M latus, & fiat e G ad G A, vt M H ad H A, & ducatur ordinatim applicata ad axim e d, coniungaturque recta d C, & extendatur diameter a b parallela ipsi d C, cuius latus rectum sit a c. Dico a c æquale esse A F: quia e G* Lem. 4. huius. *ad G A facta fuit vt M H, siue G H ad H A, ergo rectangulum sub e G A in* Lem. 5. huius. *A H æquale est quadrato G A, ideoque erectum a c æquale erit erecto A F, quod erat propositum.*

Dato

Dato latere recto I K diametri hyperboles I L reperire latus rectum alterius Diametri, quod æquale sit lateri recto I K: oportet autem, vt Diameter I L cadat inter axim, & aliam Diametrum, quæ subdupla sit sui erecti. PROP. 2. Addit.

Reperiatur Diameter Q P, quæ subdupla sit sui erecti P R, eiusque latus sit M C; ergo ex hypothesi I L cadet inter axim A C, & Diametrum P Q, & propterea terminus E lateris C E cadet inter A, & M, igitur reperiri poterit V G, quæ ad G E eandem proportionem habeat, quàm maior M H ad minorem H E, & vt prius, lateris C V ducatur diameter S T, cuius latus rectum S Z: dico S Z æquale esse I K: quia V G ad G E est, vt M H, seu G H ad H E, ergo rectangulum sub V G E in E H æquale est quadrato G E, ideoque S Z æquale I K; quod erat propositum. ex 35. hu. Lem. 4. huius. Lem. 5. huius.

Deducitur ex prima propositione additarum quod in aliqua hyperbola reperiri possunt tria diametrorum latera recta æqualia inter se; si nimirum in hyperbola, cuius axis C A minor sit medietate eius lateris recti, reperiantur vtrinque duæ diametri b a, *quarum latera recta* a c *æqualia sint ipsi A F; tunc quidem tria illa latera recta æqualia erunt inter se: reliqua verò latera recta diametrorum cadentium inter A, &* a *maiora erunt latere recto A F; & latera recta diametrorum cadentium vltra punctum* a *ad partes B maiora sunt latere recto* a c, *propterea quod magis recedunt ab omnium minimo latere recto P R.* ex 35. huius.

Simili modo in eadem hyperbola reperiri possunt quatuor diametrorum latera recta æqualia inter se, si nimirum ex secunda propositione additarum dato latere recto I K diametri I L reperiatur æquale latus rectum S Z alterius diametri S T, & ex altera parte axis ducantur duæ alia diametri æquè ab axi remota ac illa, erunt quatuor recta latera earum æqualia inter se, & maiora quolibet latere recto diametri cadentis inter I, & S ad vtrasque partes axis: minora verò erunt quolibet latere recto diametri cadentis vltra punctum I ad partes verticis A, vel infra puncta S ad partes a, *vt deducitur ex 35. huius.*

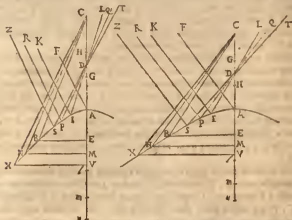
SECTIO SEPTIMA

Continens Proposit. XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

PROPOSITIO XXXVIII.

IN hyperbole axis inclinatus si non fuerit minor triente erecti ipsius, erunt duo latera figuræ axis minora, quàm duo latera figuræ cuiuslibet inclinatæ coniugatarum, quæ in eadem sectione consistunt, & duo latera figuræ inclinati proximioris axi minora sunt, quàm duo latera figuræ remotioris inclinati.

Si verò fuerit axis minor parte tertia sui erecti assignari poterunt ad vtrasque eius partes duo æquales diametri, quarum quælibet pars tertia sit sui erecti, atque duo latera figuræ eiusdem minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione cadentis: & duo latera figuræ diametri ei propinquiores minora sunt duobus lateribus figuræ remotioris.



In eadem figura supponatur prius hyperboles axis A C non minor suo erecto, erit P Q maior quàm A C, & S T maior quàm P Q: ideoquè erectus ipsius A C minor erit erecto ipsius P Q (33. ex 7.), & erectus ipsius P Q minor est erecto ipsius S T; igitur duo latera figuræ A C minora sunt, quàm duo latera figuræ P Q, & duo latera figuræ P Q minora, quàm duo latera figuræ S T.

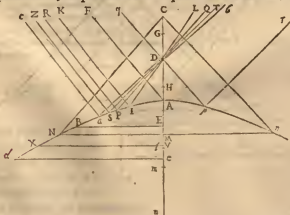
PROPOSITIO XXXIX.

DEindè sit A C minor quàm A F, sed non sit minor tertia parte eius; igitur A H non erit minor tertia parte ipsius H C: & propterea non est minor quadrante ipsius A C; ideoque C A in A H non est minus quarta parte quadrati A C; quare C A in A M quater sumptum ad C A in A H quater, nempe M A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm quadruplum ipsius A C in A M ad quadratum A C. Et ponamus M *m* æqualem M A, componendo M H, ad H A, nempe M H in H A ad quadratum H A non habebit maiorem proportionem, a

tionem, quàm C M in M A quater sumptum vna cum quadrato C A, nempe quàm quadratum C *m* ad quadratum A C; ideoque M H in H A ad quadrarum H A minorem proportionem habet quàm quadratum C *m* ad quadratum A C. Et permutando M H in H A ad quadratum C *m*, seu ad quadratum ex summa ipsarum G M; & M H, ad quod habet eandem proportionem quàm quadratum C A ad quadratum summæ P Q, & P R (17. ex 7.) habebit minorem proportionem, quàm quadratum A H ad quadratum A C, seu quàm quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum A C, & A F; igitur summa ipsarum A C, & A F minor est quàm summa ipsarum P Q, & P R. Et quia M H maior est quarta parte summæ ipsarum M G, & M H; ergo quadruplum C *m* in M H maius est quadrato C *m*, & ponatur V *n* æqualis A V; igitur quadruplũ V M in C *m* ad quadruplum M H in C *m*, scilicet V M ad M H minorem proportionem habebit, quàm quadruplum V M in C *m* ad quadratum C *m*: & componendo V H ad H M, nempe V H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm V M in C *m* quater sumptum, vel *n m* in *m* C bis sumptum cum quadrato C *m* (eo quod *n m* dupla est ipsius V M quæ omnia simul ad idem quadratum C *m* minorem proportionem habet, quàm quadratum C *n*. Ergo V H in H A ad quadratum C *n*, scilicet quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum S T, & S Z (17. ex 7.) minorem proportionem habet quàm M H in H A ad quadratum C *m*, seu quàm quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum P Q, P R (17. ex 7.) quapropter P Q, & P R simul sumptæ minores sunt, quàm S T; & S Z simul sumptæ.

PROPOSITIO XXXX.

SIt A C minor triente ipsius A F, erit A H minor dimidio ipsius H G, & ponatur M H æqualis dimidio H G, & du-



camus

camus perpendicularem, & diametrum. Dico, quod P Q æqualis eſt trienti ipſius P R.

Educamus inter P Q, A C diametrum I L, & educamus C B ei æquidiſtantem, & perpendicularem B E, & ſecemus E *l* æqualem E A erit ſumma ipſarum G E, & E H æqualis C *l*; eſtque H E minor quàm M H, quæ quarta pars eſt ipſius C *m*; ergo ſumma ipſarum M G, H E in M H quater ſumptum minus eſt quadrato C *m*: auferatur communiter M G, H E in M E quater ſumptum remanebit quadruplum ſummæ M G, H E in H E minus quàm quadratum C *l* (quia M G, H E ſimul ſumptæ, nempe M C vna cum A E in M E quater ſumptum æquale eſt quadrato *l m*; quod eſt duplum M E, & aggregatum C E, A E, nempe C *l* in *l m* bis ſumptum) igitur aggregatum M G, & H E in M E quater ſumptum ad aggregatum M G, H E in H E quater ſumptum, nẽpe G E ad H E maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum *l* C. & componendo M H ad H E, ſeu M H in H A ad E H in H A habebit maiorem proportionem, quàm M G, H E in M E quater ſumptum cum quadrato *l* C (quæ æqualia ſunt quadrato C *m*) ad quadratum *l* C: & permutando erit M H in H A ad quadratum C *m*, nempe ad quadratum ſummæ ipſarum M G, & M H, ſeu quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum P Q, P R (17. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum *l* C (quod eſt æquale quadrato ſummæ ipſarum G E, E H) quod erit vt quadratum A C ad quadratum aggregati ipſarum I L, I K: quapropter A C ad duo latera figuræ P Q maiorem proportionem habet, quàm ad duo latera figuræ I L. Et propterea duo latera figuræ P Q minora ſunt, quàm duo latera

figuræ

figuræ I L. Simili modo ostendetur, quod duo latera figuræ I L minora sunt, quàm duo latera figuræ A C.

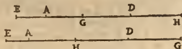
Educamus postea C X extra segmentum A N; & educamus diametrũ S T ei parallelam, & ad axim perpendicularem X V, erit aggregatum G V, M H in M H quater sumptum maius quàm quadratum C *m*; & addamus communiter aggregatum M H, G V in M H quater sumptum; ostendetur vt antea, quod duo latera figuræ S T maiora sunt, quàm duo latera figuræ P Q.

Ostendetur quoque in reliquis diametris cadentibus ad vtrasque partes ipsius P Q in eadem sectione, quod duo latera figuræ diametri ipsi P Q proximioris minora sunt, quàm duo latera figuræ remotioris.

In Sectionem VII. Proposit: XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

LEMMA VI.

SI recta linea H G bifariam secta in D producatur vtcumque ad A, & E, ita vt D H non maior sit quàm H E, vel H A, & E D maior sit, quàm D A: dico rectangulum sub E D A in H A maius esse quadrato D A.



Quia E D maior ad minorem D A habet maiorem proportionem, quàm D H non maior ipsa H A, ad H A, ergo componendo E D A ad D A maiorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum sub extremis contentum, scilicet sub E D A in A H, maius est quadrato D A.

LEMMA VII.

IIsdem positis, si D H non minor fuerit quàm H A, vel H E, sitque H E maior, quàm H A: dico rectangulum sub E D A in A H minus esse quadrato D A.



Fiat

Fiat H M æqualis maiori H D, erit E A differentia minima H A, & intermediæ H E minor, quàm M A, quæ est differentia maxima M H, & minima H A, & A D maior est quàm A H, ergo E A ad M A minorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & permutando E A ad A D habebit minorem proportionem, quàm M A ad A H, & componendo E D ad D A minorem proportionem habebit, quàm M H, siue D H ad A H, & iterum componendo E D A ad D A minorem proportionem habebit, quàm eadem D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H minus erit quadrato D A.

LEMMA VIII.

Iisdem positis si D H maior fuerit, quàm A H sed minor quàm E H, fueritque proportio E A ad A D eadem proportioni M A ad A H, dico rectangulum sub E D A in A H æquale esse quadrato D A: si verò proportio illa maior fuerit, vel minor rectangulum similiter quadrato maius, vel minus erit.



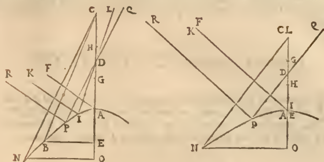
Quia E A ad A D ponitur vt M A ad A H, componendo E D ad D A, erit vt M H, seu D H ad H A, & iterum componendo E D A ad D A, erit vt D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H æquale erit quadrato D A.

Quando verò E A ad A D maiorem proportionem habet, quàm M A ad A H, tunc bis componendo E D A ad D A maiorem proportionem habebit, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum sub extremis; scilicet sub E D A in A H maius erit quadrato intermediæ D A: non secus quando E A ad A D minorem proportionem habet, quàm M A ad A H, ostendetur rectangulum sub E D A in A H minus quadrato ex D A.

LEMMA IX.

In hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præsecta H A, intercepta G A, centrum D, diameter I L, eiusque erectus I K, & C E sit latus eiusdem, sitque diameter Q P, cuius erectus P R, & latus L O: dico quod rectangulum sub O D E in E H ab ipso quadrato D E, atque Q P R summa laterum figuræ Diametri P Q ab L I K summa laterum figuræ I L, vel ab ipsa C A F summa laterum figuræ axis, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et



Et primo rectangulum sub O D E in E H æquale sit quadrato D E, ergo ad hæc duo spatia æqualia eandem proportionem habebit idem rectangulum sub E D O in O E, sed vt rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, ita est O E ad E H, (propterea quod æquales altitudines habent), igitur vt O E ad E H, ita est rectangulum sub E D O in O E ad quadratum D E, & componendo O H ad E H, siue rectangulum O H A ad rectangulum E H A eandem proportionē habebit, quàm rectangulum sub E D O in O E vna cum quadrato D E, seu quàm quadratum D O ad quadratum D E, vel potius vt quadratum ex dupla D O ad quadratum ex dupla D E, nempe vt quadratum ex G O H ad quadratum ex G E H, quare permutando rectangulum O H A ad quadratum ex G O H eandem proportionem habebit, quàm rectangulum ex E H A ad quadratum ex G E H, seu vt quadratum ex A C ad quadratum ex C A F, vel ex L I K; sed vt rectangulum A H O ad quadratum ex G O H, ita est quadratum ex A C ad quadratum ex Q P R: quare idem quadratum A C eandem proportionem habet ad quadratum ex Q P R, quàm ad quadratum ex C A F, vel ex I K L, & propterea quadrata ipsa æqualia sunt, & summa laterum Q P R æqualis est summa laterum C A F, vel I L K. Prop. 16. huius. Ibidem.

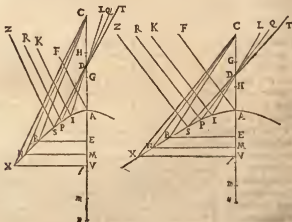
Secundo sit rectangulū sub E D O in E H maius quadrato D E, tunc quidem idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub O D E in E H minorem proportionē habebit, quàm ad quadratum ex D E, seu O E ad E H minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex D E; & componendo sumpta eadem altitudine H A, quadruplicando postrema quadrata, & permutando, & ex 16. huius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R minorem proportionem habebit, quam ad quadratum ex C A F, vel ex L I K, & propterea summa Q P R maior erit, quàm C A F, seu quàm L I K.

Tertio sit rectangulum sub E D O in E H minus quadrato D E, patet quod idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, seu O E ad E H maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum D E, & componendo ductis prioribus terminis in A H, quadruplicando postrema quadrata,

permutando vt prius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R, maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, seu ex L I K, & propterea summa Q P R minor erit, quàm C A F, vel L I K, quæ erat ostendenda.

Notæ in Proposit. XXXVIII. XXXIX.

Quia axis C A minor non est triente eius erecti A F, estq; H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A æqualis, aut maior est parte tertia ipsius A G; & A H æqualis, aut maior erit, quàm semissis ipsius H G differentiæ illarum, estque G H secta bifariam in D, ergo H A æqualis, aut maior erit,

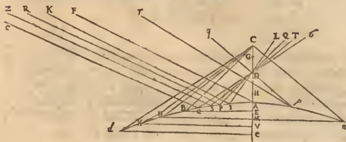


Lem. 6. *quàm D H, estque H E maior quàm H A, ergo pariter H E maior est, quàm D H, quare rectangulum sub E D A in A H maius erit quadrato D A, atque*
Lem. 9. *summa laterum figuræ L I K maior, quàm summa laterum figuræ axis C A F. Similiter quia H M maior est, quàm H E, erit quoque H M maior, quàm D H, & propterea ex lemma 6. & 9. summa Q P R maior erit, quàm summa L I K.*

Notæ in Proposit. XXXX.

Quia C A minor est triente ipsius A F, estque H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A minor est tertia parte ipsius A G, & minor semisse differentia

rentia H G , & ideo H A minor erit , quàm H D : secari ergo poterit H M aqualis D H , quæ maior erit , quàm A H , ducaturq; per M ad axim ordinatim applicata N M n *occurrens sectioni in punctis N* n , *à quibus iungātur C N , & C*



n , *ijsdemque æquidistantes ducantur duæ diametri P Q , &* p q , *quarum latera recta P R , &* p r . *Ostendendum est P Q sui erecti P R , atque* p q *sui erecti* p r *subtriplam esse, sed duo figuræ latera P Q , P R æqualia esse alterius figuræ lateribus* p q , p r , *& insuper P Q , P R minima esse laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri eiusdem sectionis, & latera figurarum minimis proximiora , esse minora lateribus figurarum remotiorum .*

Quia H M ad M G eandem proportionem habet quàm P Q ad P R , vel p q *ad* p r , *estque H M subtripla ipsius M G (cum M H facta sit æqualis H D) ergo P Q ipsius P R , pariterque* p q *ipsius* p r *subtripla est : & sunt latera figuræ Q P R æqualia lateribus* q p r *alterius figuræ , cum diametri Q P , &* q p *æquè recedant ab axi , & habeant latus commune C M .* Prop. 6. huius.

Quod verò summa laterum figuræ Q P R minima sit reliquarum summarū laterum figuræ cuiuslibet diametri sic ostendetur .

Quia A H , & E H minora sunt , quàm H M , siue D H , ergo rectangulum sub E D A in A H minus est quadrato D A , & summa L I K minor est summa C A F . Lem. 7. Lem. 9.

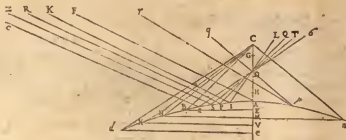
Pariter quia M H æqualis est H D , & H E minor eadem , ergo ambo non erunt maiores eadem D H , ergo rectangulum sub M D E in E H minus erit quadrato D E , atque summa Q P R minor erit , quàm L I K . Lem. 7. Lem. 9.

Rursus quia V H maior , est quàm M H , seu quàm D H , erunt illæ non minores eadem D H , ergo rectangulum sub V D M in H M maius erit quadrato D M , atque summa T S Z maior erit , quàm summa Q P R . Lem. 6. Lem. 9.

In hyperbola reperire diametrum , cuius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ axis : oportet autem vt axis A C minor sit triente erecti eius . Reperiatur diameter P Q subtripla erecti eius P R , eiusque latus sit C M , & fiat e *A ad A D , vt M A ad A H , & lateris C* e *ducatur diameter* a b , *cuius erectus* a c . *Dico hanc esse diametrum quæsitam : quia* e *A ad A D eandem proportionem habet , quàm M A ad A H , erit rectangulum sub* e *D A in A H* PROP. 3. Addit. ex 40. huius.

 æquale

Lem. 8. Lem. 9. *æquale quadrato D A, & summa laterum* b a c *æqualis erit laterum figuræ axis summa C A F.*



PROP. 4. Addit. *In eadem hyperbola data diametro I L reperire aliam diametrum, ita vt eius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ datæ diametri I L: oportet au-*
ex 40. huius. *tem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q subtriplam eius erecti. Sit C E latus diametri I L, & C M, sit latus diametri P Q, & quia punctum E cadit inter M, & A, erit H E minor, quàm H M, vel D H: fiat V E*
Lem. 8. *ad E D, vt M E ad E H, ergo rectangulum sub V D E in E H æquale erit quadrato E D, & ex lemma 9. summa laterum T S Z æqualis erit summa laterum L I K; quod erat propositum.*

Facile colligitur ex 3. additarum, quod in hyperbola cuius axis subtripla sit erecti eius assignari possunt tres summæ laterum figurarum trium Diametrorum quæ æquales sint inter se. Ex 4. verò additarum in eadem Hyperbola assignari, possunt quatuor summæ laterum figurarum quatuor diametrorum, quæ æquales sint inter se.

Deinde sit A C minor, quàm A F, sed non sit minor eius triplo, ergo A H non erit minor triplo H C, &c. *Textus mendosus omnino corrigi debuit, nam ex contextu sequenti deducitur A C non tripla minor, sed minor parte tertia supponi debere ipsius A F.* a



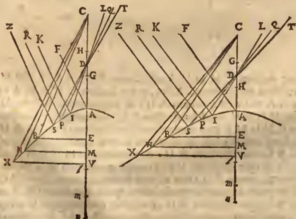
SECTIO

SECTIO OCTAVA

Continens Proposit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

IN hyperbole si quadratum axis inclinati minus non fuerit dimidio quadrati ex differentia ipsius, & sui erecti, vtique quadratum diametri figuræ eius minus est, quàm quadratum diametri figuræ cuiuscumque alterius inclinati eiusdem sectionis.

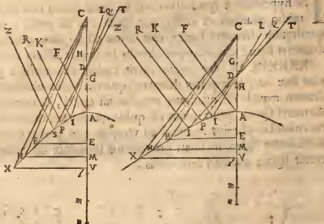
XXXXVI. Si verò minus fuerit cadent ad vtrasque partes eius duæ inter se æquales diametri, quarum vniuscuiuslibet quadratum æquale est quadrato excessus sui erecti, & quadratum diametri figuræ ipsius minus est quàm quadratum diametri figuræ cuiuslibet alterius inclinati ad vtrasque eius partes cadentis: & diameter figuræ inclinati proximioris illi minor est quàm diameter figuræ inclinati remotioris.



Iisdem figuris manentibus supponatur prius A C non minor quàm A F; ergo P Q non erit minor quàm P R (28. ex 7.) & duo quadrata A C, A F nempe diameter figuræ A C minor est quàm diameter figuræ P Q; & Demonst. prop. 44.

Q; & pariter diameter figuræ P Q minor est, quàm diameter figuræ S T. Sit iam A C minor quàm A F, & eius quadratum non minus dimidio quadrati excessus ipsius A F super A C. Et quia A C ad A F eandem proportionem habet, quàm A H ad A G; ergo duplum quadrati A H non est minus quadrato H G; ergo M H in H A bis sumptum maius est quadrato H G, & addatur communiter duplum G A in A H fiet duplum summæ G A, M H, vel C M in A H maius quàm duplum G A in A H cum quadrato H G, seu quàm quadratum G A cum quadrato A

Demonst. prop. 45.



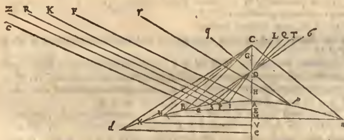
H: quare duplum C M in M A ad duplum C M in A H, seu M A ad A H minorem proportionem habet, quàm duplum C M in M A ad quadratum G A vna cum quadrato A H: & componendo habebit M H ad H A, seu M H in H A ad quadratum A H minorem proportionem quàm duplum C M in M A cum duobus quadratis ipsarum G A, & A H (quæ omnia simul æqualia sunt quadrato M G cum quadrato M H) ad quadratum A G cum quadrato A H: & permutando M H in H A ad quadratum G M cum quadrato M H (nempe quadratum A C ad duo quadrata laterum figuræ P Q) siue ad quadratum diametri figuræ P Q (17. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm quadratum H A ad quadratum A G cum quadrato A H, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius; igitur quadratum A C ad diametrum figuræ P Q minorem proportionem habet, quàm ad diametrum figuræ A C: & ideo diameter figuræ P Q maior erit diametro figuræ A C. Præterea, quia duplum quadrati M H maius est quadrato H G; ergo V H in M H bis maius erit, quàm quadratum H G: & ostendetur (quemadmodum diximus) quod diameter figuræ S T maior sit quàm diameter figuræ P Q,

PROP.

PROPOSITIO XXXXVI.

SIt postea quadratum A C minus dimidio quadrati ex differentia ipsarum C A, & A F; erit duplum quadrati A H minus quadrato H G & ponamus duplum quadrati M H æquale quadrato H G: & educamus ad axim perpendicularem N M, & iungamus N C; & ducamus diametrum P Q parallelã ipsi N C, erit H M ad M G, vt P Q ad P R, & propterea quadratum P Q dimidium erit quadrati excessus ipsius P R; ergo P Q est vna æqualium: ponatur insuper inter A, & P diameter I L, & constructio perficiatur, vt prius. Et quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G, erit duplum M H in H E minus quadrato H G, & ponatur communiter duplum G E in E H; igitur duplum aggregati M G in E H minus est quadrato G E cum quadrato E H; & ostendetur quemadmodum diximus antea, quod quadratum diametri figuræ P Q minus sit quadrato diametri figuræ I L; & quadratum diametri figuræ I L minus sit quadrato diametri figure A C.

a 6. huius.



Deindè ducatur diameter inclinata S T extra segmentum A P, & C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V: & quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G erit duplum V H in H M maius quadrato H G: ponatur communiter duplum G M in M H, fiet duplum aggregati V G, M H, in M H maius quadrato M G cum quadrato M H: quare duplum aggregati V G, & M H in M V ad duplum aggregati V G, & M H in M H, nempe M V ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum aggregati V G, & M H in M V ad quadratum G M cum quadrato M H: & componendo ostendetur (quemadmodum antea dictum est) quod quadratum A C ad diametrum figuræ P Q maiorem proportionem habeat, quàm ad diametrum figuræ S T. Eadem prorsus cõtingent in reliquis omnibus diametris. Quapropter diameter figuræ P Q minor est diametro figuræ cuiuslibet diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione existente. Quod erat ostendendum.

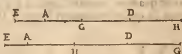
In

In Sectionem VIII. Proposit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

L E M M A. X.

SI rectæ lineæ G H bifariam sectæ in D addantur segmenta H A, & H E atque proportio dupli E H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H A: dico duplum rectanguli ex G A, & H E in H A æquale esse quadratis ex G A, & ex A H: si verò proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadratis: si verò proportio fuerit minor, rectangulum minus erit quadratis.

Primo quia si duplum E H ad H G, est vt G H ad H A, ergo duplum rectanguli E H A æquale erit quadrato G H, & addatur communiter duplum rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex summa G A, & E H in A H æquale duplo rectanguli G A H cum quadrato G H; his verò spatijs æquantur quadrata ex G A, & ex A H, ergo duplum rectanguli ex summa G A, E H in A H æquale erit duobus quadratis ex G A, & ex A H.



Secundo, quia duplum E H ad H G, maiorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A maius est quadrato G H, & addito communiter duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H maius duobus quadratis ex G A, & ex A H.

Tertio, quia duplum E H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A minus est quadrato G H, & addito duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H minus quadratis ex G A, & ex A H.

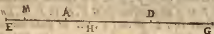
L E M M A XI.

SI recta linea G H secetur exterius in A, E, & sit eadem G H differentia nedum segmentorum G E, & E H, sed etiam duorum segmentorum G A, & A H: dico quod quadrata ex maximo, & ex vno intermediorum segmentorum, scilicet ex G E, & ex E H æqualia sunt quadratis ex reliquo intermediorum, & ex minimo segmento, scilicet ex G A, & ex A H vna cum duplo rectanguli



guli ex summa extremorum, vel intermediorum in differentiam minimorum segmentorum, scilicet ex G A cum H E in E A.

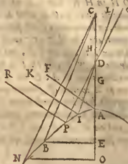
Quia duplum rectanguli G A H cum duplo rectanguli G A E aequatur duplo rectanguli sub G A in H E, addito cõmuniter duplo rectanguli H E A erit duplum rectanguli G E H aequale duplo rectanguli G A H cum duplo rectanguli ex summa G A, H E in E A; & addito communi quadrato G H, erit duplum rectanguli G E H cum quadrato G H, scilicet duo quadrata ex G E, & ex E H, erunt aequalia illis omnibus spatijs, scilicet duplo rectanguli ex summa G A, H E in E A cum duplo rectanguli G A H simul cum quadrato ex G H: sed duplo

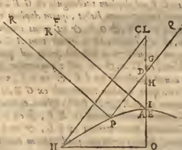


rectanguli G A H cum quadrato G H aequalia sunt duo quadrata ex G A, & ex A H, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H aequalia erunt quadratis ex G A, & ex A H cum duplo rectanguli ex G A, & H E in E A, quod erat ostendendum.

L E M M A XII.

IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, praesectae C G, H A, centrum D, atque diameter I L, eiusque erectus I K, & latus C E, pariterque altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex G E cũ O H in H E à duobus quadratis ex G E, & ex E H; nec non quadrata Q P, & P R laterum figurae diametri Q P à quadratis ex L I, & ex I K, vel ex C A, & ex A F, vna deficiunt, aut vna aequalia sunt, vel vna excedunt.





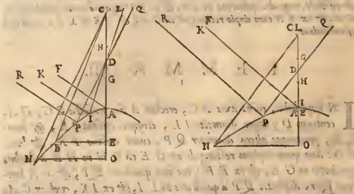
 Quia

Quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E aequale est quadratis ex G E & ex E H, ergo idem rectangulum, cuius altitudo G E, & O H, basis verò O E bis sumptum ad duplum rectanguli, cuius altitudo G E, O H, basis verò H E, seu O E ad H E eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad quadrata ex G E, & ex E H: quare componendo O H ad E H, seu O H A ad E H A eandem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex G O, & ex O H ad duo quadrata ex G E, & ex E H, & permutando O H A ad quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex Q P, & ex P R eandem proportionem habebit, quàm rectangulũ E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu erit vt quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex C A, & ex A F: quare duo quadrata ex Q P, & ex R P aequalia sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, vel ex C A, & A F.

Lem. 11. huius.

17. huius.

Ibidem.



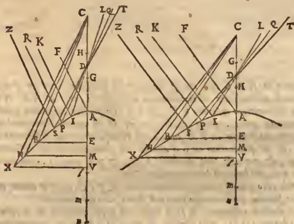
Secundo quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E minus ponitur quadratis ex G E, & ex E H, igitur idem spatium scilicet duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad duplum rectanguli ex G E, & O H in H E, siue O E ad H E maiorem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, O H in O E ad quadrata ex G E, & O H, & vt prius componendo, ex lemmate 11. & permutando, ex 17. huius; idem quadratum A C ad quadrata ex Q P, & ex P R maiorem proportionem habebit quàm ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata, ex C A, & ex A F: quapropter quadrata ex Q P, & ex P R minora erunt quadratis ex I L, & ex I K, vel quadratis ex C A, & ex A F.

Tertio quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E maius est summa quadratorum ex G E, & ex E H, igitur, eodem progressu, habebit quadratum A C ad summam quadratorum ex Q P, & ex P R minorem proportionem, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex I K, vel ex C A, & ex A F: & propterea summa priorum quadratorum maior erit summa posteriorum, vt fuerat propositum.

Nota

Notæ in Proposit. XXXXIV. & XXXXV.

Quia C A maior est, quàm A F, vel si minor est quadratum ex C A, minor non est dimidio quadrati ex differentia C A, & A F, estque H A ad A G vt A C ad A F, & H A ad G H, vt A C ad differentiam ipsarum A C, A F, ergo quadratum H A ad dimidium quadrati G H erit vt quadratum A C ad dimidium quadrati ex differentia ipsarum A C, & A F, quare quadratum ex H A minor non erit semisse quadrati H G, ideoq; duplum quadrati A H minor non erit quadrato H G, estque duplum rectanguli E H A, vel M H E maius duplo quadrati A H, seu maius quadrato H G; propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H A, ideoque duplum rectanguli ex G A, H A in A H maius erit quadratis ex G A, & ex A H, & insuper summa quadratorum ex I L, & ex I K maior erit, quàm summa quadratorum ex C A, & ex A F.

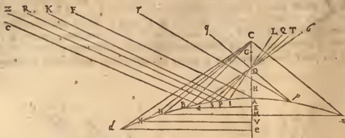


Lem. 10.
Lem. 12.

Notæ in Proposit. XXXXVI.

Quia quadratum axis C A minus est semisse quadrati ex differentia ipsarum A C, & A F, estque H A ad A G, vt C A ad A F, atque G H est differentia ipsarum A H, & A G, igitur quadratum ex A H minus

minus est semisse quadrati G H: fiat iam quadratum ex M H æquale semiquadrato ex G H, & lateris C M fiant duo diametri Q P, & q p, eorumque erecta sint P R, & p r: dico ductas diametros æquales esse, & quadratum ex P Q æquale esse quadrato ex differentia ipsarum P Q, & P R.



ex 6. hu. *Quia vt M H ad G M, ita est diameter Q P ad eius erectum P R, ergo comparando antecedentes ad terminorum differentias, erit M H ad H G, vt P Q ad differentiam ipsarum P Q, & P R, & pariter eorundem quadrata proportionalia erunt, estque quadratum ex H M æquale semiquadrato ex G H, ergo quadratum ex P Q æquale erit semiquadrato ex differentia P Q, & P R, & sic quadratum ex p q æquale erit semiquadrato ex differentia ipsarum p q & p r; & sunt diametri P Q, & p q æquales, cum æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M.*

Secundo dico quod summa quadratorum ex Q P, & ex P R minor est qualibet alia summa quadratorum laterum figuræ alterius diametri.

Quia duplum rectanguli M H E minus est duplo quadrati M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum M H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli ex G E, & M H in E H
Lem. 10. huius. *minus erit summa quadratorum ex G E, & ex E H & propterea summa qua-*
Lem. 12. huius. *dratorum ex Q P, & ex P R minor erit summa quadratorum ex I L, & ex I K.*

Tertio, quia duplum rectanguli ex E H A minus est duplo quadrati M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum E H ad H G minorem proportio-
Lem. 10. huius. *nem habet, quàm G H ad H A, ergo duplum rectanguli ex G A, E H in A H*
Lem. 12. huius. *minus erit summa quadratorum ex G A, & ex A H: quare summa quadratorum ex I L, & ex I K minor erit, quàm quadratorum summa ex A C, & ex A F.*

Quarto quia duplum rectanguli V H M maius est duplo quadrati ex M H, seu singulari quadrato ex G H, ergo duplum V H ad H G maiorem proportio-
Lem 10 huius *nem habet, quàm H G ad H M, & propterea duplum rectanguli ex G M, & V H in M H maius erit summa quadratorum ex G M, & ex M H, & ideo*
Lem. 12 huius. *summa quadratorum ex T S, & S Z maior erit quadratorum summa ex Q P, & ex P R, & sic de reliquis: quare summa quadratorum ex Q P, & ex P R minima est omnium, vt fuit propositum.*

In

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ axis : oportet autem vt quadratum axis C A minus sit semiquadrato ex differentia laterum figuræ eius C A, & A F. PROP. 5. Addit.

Quia ex hypothesi quadratum axis A C minus est semiquadrato ex differentia laterum figuræ A C, A F, vt in nota proposit. 46. dictum est, quadratum ex A H minus est semiquadrato ex G H : fiat duplum c H ad H G, vt G H ad H A, & lateris C c ducatur diameter b a, cuius erectus c a, ergo duplum rectanguli ex summa G A, c H in A H æquale est summæ quadratorum ex G A, & ex A H, & summa quadratorum ex a b, & ex a c æqualis erit quadratorum summæ ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum. Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

In eadem hyperbola diametrum reperire, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L : oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex differentia P Q, & ex P R. PROP. 6. Addit

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z : erit igitur duplũ rectanguli ex G E, & V H in E H æquale quadratis ex G E, & ex E H, & propterea summa quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis erit quadratorum summæ ex L I, & ex I K, quod erat propositum. Lem. 10. Lem. 12. huius.

Deducitur pariter ex 5. propositione additarum in eadem hyperbola tres diametros reperiri posse, quarum laterum summæ quadratorum æquales sint inter se.

Et ex 6. propositione additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem hyperbolæ laterum summa quadratorum æquales esse possunt inter se.

a Et educamus inter A P inclinatam I L : quia quadruplum quadrati M H æquale est quadrato H G, &c. *Suppleri debent ea, quæ deficiunt, alioqui constructio imperfecta esset : duci igitur debet C B parallela diametro I L, quæ occurrat sectioni ad punctum B, à quo ad axim perpendicularis ducatur B E secans axim in E.*

SECTIO NONA

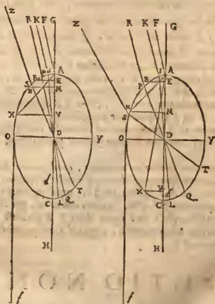
Continens Proposit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

a IN ellipsi duo latera figuræ maioris axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri, & duo latera figuræ diametri axi maiori proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ diametri remotioris.

XXXXVII.

XXXXVII. Si verò duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; vtique quadratum diametri ſuæ figuræ minus erit quadrato diametri figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ſectionis, & quadratum diametri figuræ proximioris axi minus erit quadrato diametri figuræ remotioris.

XXXXVIII. Si autem duplum quadrati axis tranſuerſi maius fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ, æquidem reperientur ad vtraſque eius partes duæ diametri æquales, & cu-



iuslibet earum quadratum bis ſumptum æquale erit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; & quadratum diametri ſuæ figuræ minus eſt quadrato diametri figuræ alterius cuiuſcunque diametri exiſtentis in eodem quadrante eiuſdem ſectionis; & diameter figuræ proximioris minor eſt diametro figuræ remotioris.

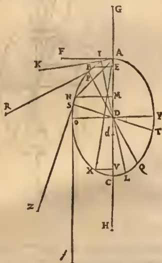
PROP.

PROPOSITIO XXXXI.

IN ellipsi A B C sit A C axis maior, & y O minor, & sint P Q, & S T duæ aliæ diametri, sitque A F erectus ipsius A C, & P R erectus ipsius P Q, & O f ipsius y O. Dico quod C F minor est, quàm Q R, & Q R, quàm T Z, & T Z, quàm y f.

Ducantur A N, A X ordinatim applicatæ ad diametros P Q, S T, & duæ ad axim perpendiculares N M, X V, & interceptæ A G, C H.
b Quia quadratum A C ad quadratum y O, nempe A C ad A F eandem proportionem habet, quàm C G ad G A, seu ad C H habebit quadratum C A ad quadratum C F summæ ipsius C A, eiusque erecti eandem proportionem, quàm quadratum C G, nempe C G in A H ad quadratum G H: & quadratum A C ad quadratum y O eandem proportionem habet, quàm G C in C H ad quadratum C H: estquè quadratum y O ad quadratum summæ y f, vt quadratum C H ad quadratum H G; ergo quadratum A C ad quadratum y f est, vt C G in C H minorem ad quadratum H G; sed quadratum A C ad quadratum C F eandem proportionem habet, quàm G C in maiorem A H ad quadratum G H; igitur A C ad C F maiorem proportionem habet, quàm ad y f: & propterea C F summa A C, & erecti illius minor est, quàm y f, quæ est summa y O, & erecti illius. Et quoniam C G in M H, quod minus est, quàm C G in A H ad quadratum H G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum Q R summæ diametri, & erecti ipsius P Q (16. ex 7.) quare quadratum A C ad quadratnm C F maiorem proportionem babebit, quàm ad quadratum Q R, & propterea C F minor erit, quàm Q R. Et quoniam C G in V H ad quadratum H G est vt quadratum A C ad quadratum T Z ad quàm ordinatim applicatur A X (16. ex 7.) erit C F minor quàm T Z: cùmque C G in H M ad quadratum H G maiorem proportionem habeat, quàm G C in V H ad quadratum idipsum H G habebit quadratum

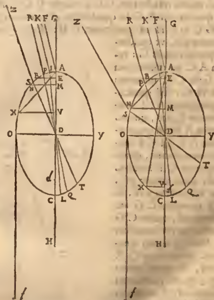
Defin. 1. huius.



tum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem quàm ad quadratũ T Z. Et pariter oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum T Z maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum γ ſ; quapropter C F minor eſt quàm Q R, & Q R minor, quàm T Z, & T Z minor, quàm γ ſ. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXXVII.

IN eadem figura ſi duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ſummæ C F. Dico, quod diameter figuræ eius minor eſt diametro figuræ Q P R, & diameter figuræ Q P R minor eſt diametro figuræ T S Z.



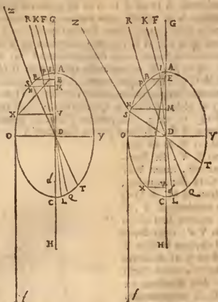
Quoniam duplum quadrati A C non excedit quadratum ſummæ C A F; ergo duplum quadrati C G, nempe G C in A H bis ſumptum non excedit quadratum H G, & propterea C G in H M bis ſumptum minus eſt quadrato H G: tollatur communiter duplum M G in H M remanebit

duplum

duplum H M in C M minus duobus quadratis ex M H, & ex G M: & propterea A M in M C bis sumptum ad H M in M C bis sumptum, nẽpe A M ad M H habebit maiorem proportionem, quam duplum A M in M C ad duo quadrata ex H M, & ex G M: & componendo A H ad H M, seu quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habebit quàm duplum A M in M C cum duobus quadratis ex H M, & ex M G (quæ omnia simul æqualia sunt duobus quadratis C G, & H C) ad duo quadrata M H, & M G; igitur quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habet, quàm duo quadrata C G, & C H ad duo quadrata H M, & G M, & permutando quadratum A H ad duo quadrata C G, & H C, scilicet quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius maiorem proportionem habet, quàm A H in H M ad duo quadrata M G, & M H, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) quapropter diameter figuræ P Q maior est diametro figuræ A C. Ducatur postea diameter S T, & ad eam ordinatim applicata A X, & ad axim perpendicularem X V. Et siquidem G M minor est, quàm V H cum A G, & C H sint æquales, erunt duo quadrata H M, & M G maiora duobus quadratis H V, V G: hæc autem maiora sunt quàm duplum V H in V d: ergo duplũ M V in V d ad duplum H V in V d, nempe V M ad V H maiorem proportionem habet, quàm duplũ M V in V d ad duo quadrata ex V H, & ex V G; & componendo M H ad H V, seu M H in H A ad V H in H A maiorem proportionem habebit, quàm duplum M V in V d cum duobus quadratis ex V H, & ex V G, quæ omnia simul sunt vt duo quadrata M H, & M G ad duo quadrata V H, & V G: & permutando M H in H A ad duo quadrata H M, & G M, seu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm V H in H A ad duo quadrata V H, & V G, seu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) quare diameter figuræ S T maior est diametro figuræ P Q. Postea quia y O est media proportionalis inter A C, & A F erit quadratum A C ad quadratum y O, vt A C ad A F, nempe vt C G ad C H, seu vt C G in C H ad quadratum C H, & quadratum y O ad summam quadratorum y O, & O f, nempe ad quadratum diametri suæ figuræ est vt quadratum H C ad quadratum C G cum quadrato H C: quare ex

 æquali-

æqualitate quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O eandem proportionem habet, quàm C G, seu A H in H C ad duo quadrata ipsius C G, atque ipsius C H: igitur A H in H V maiorem ad duo qua-

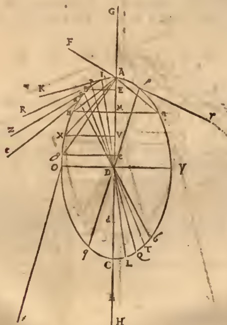


drata ex V G minori, & ex V H, seu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm A H in H C minorem ad duo quadrata ex G C, & C H maiora, scilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O (19. ex 7.); igitur quadratum diametri figuræ y O maior est quàm quadratum diametri figuræ S T. Si verò G M non fuerit minor quàm V H; vtique duo quadrata ex G M, & M H non erunt maiora duobus quadratis ex V G, & ex V H: at A H in M H ad duo quadrata ex G M, & ex M H, nempe quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q habebit maiorem proportionem, quàm A H ad H V ad duo quadrata ex V H, & ex V G, scilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T; igitur diameter figuræ S T maior est diametro figuræ P Q. Eadem prorsus ostendentur, quando punctum V cadit vltra punctum D ad partes A inter puncta D, & M. Et hoc erat propositum.

PROP.

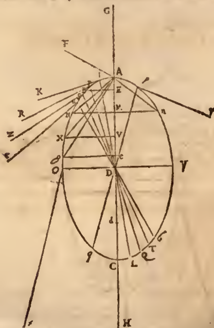
PROPOSITIO XXXXVIII.

Sit iam duplum quadrati A C maius quadrato C A F, erit duplum quadrati A H maius quadrato G H: ponatur duplum quadrati H M æquale quadrato G H: & ducatur ad axim perpendicularis M N; iun-



gaturque A N, cuiusque diameter P Q extendatur, erit H M ad M G, vt P Q ad P R (7. ex 7.); ergo, & quadratum H M ad quadratum H G erit, vt quadratum P Q ad quadratum P R, & quadratum H M ad duo quadrata ex H M, & ex M G eandem proportionē habebit, quàm quadratum P Q ad quadratum diametri suæ figuræ: educatur postea diameter I L inter A, & B, & erectum illius sit I K ad quàm ordinatim ducta sit A B, & ad axim perpendicularis sit B E erit quadratum M H, nec non G H in H D æquale dimidio quadrati H G; igitur G H ad M

H erit vt M H ad H D : & comparando homologorum differentias erit M G ad M D, vt G H ad H M : & propterea duplum G H in M D, seu quadruplum H D in D M est æquale duplo G M in M H : & propterea duplum G M in M H maius erit quàm duplum G E in M H ; ponatur communiter duplum E M in H M cum quadruplo quadrati M D, & fiat D *d* æqualis D M, fiet duplum E *d* in M H maius quadrato H M cum



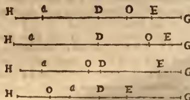
quadrato M G ; igitur *d* E in E M bis sumptum ad duplum E *d* in M H, nempe E M ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M ad duo quadrata ex M G, & ex M H : & componendo E H ad M H, seu E H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M vna cum quadratis ex M H, & ex M G, quæ æqualia sunt duobus quadratis H E, & G E ad duo quadrata ex M G, & ex H M. Et sic pariter ostendetur, quod quadratum H A ad H E in H A minorem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex H A, & ex A G ad duo quadrata ex H E, & ex E G. Atque demonstrabitur quemadmodum antea dictum est, quod quadratum diametri figu-

tri figuræ P Q minus est quadrato diametri figuræ I L, & quadratum diametri figuræ I L minus est quadrato diametri figuræ A C. Ponatur postea diametri S T, & y O vltra diametrum P Q, sitque A X ordinatim applicata ad diametrum S T, & V X ad axim perpendicularis sit, ostendetur (quemadmodum in præcedentibus dictum est) quod diameter figuræ P Q minor sit diametro figuræ S T, & diameter figuræ S T minor sit diametro figuræ y O, vbicunque secet ad axim perpendicularis X V ipsam A C. Et hoc erat ostendendum.

In Sectionem IX. Proposit. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

L E M M A. XIII.

SI recta linea G H secetur bifariam in D, & non bifariam in O, E, atque fiat G a æqualis H E; si quidem proportio dupli O H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H E, erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O in H O æquale quadratis ex G O, & ex O H: si verò proportio illa maior fuerit erit rectangulum maius quadratis; & si eadem proportio fuerit minor, idipsum rectangulum quadratis minus erit.



Et primo quia duplum O H ad H G est vt G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E æquale erit quadrato ex G H; auferatur communiter duplum rectanguli H O G, quia H O est communis rectangulorum altitudo, remanet duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, seu ex differentia ipsarum G a, & G O in H O, seu remanet duplum rectanguli a O H æquale quadrato H G minus duplo rectanguli G O H: huic verò differentiæ æqualia sunt duo quadrata ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli a O H æquale est summæ quadratorum ex G O, & ex O H.

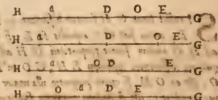
Secundo, quia duplum O H ad H G maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E maius erit quadrato G H, & ablato communiter duplo rectanguli G O H erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O maius, quàm summa quadratorum ex G O, & ex H O.

Tertio

Tertio si duplum O H ad H G minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, eodem progressu ostendetur, quod duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O minus est quadratis ex G O, & ex H O, quod erat propositum.

LEMMA XIV.

Isdem positis sit G E minimum segmentorum; dico quod duo quadrata ex E H, & ex G E, scilicet ex maximo, & minimo segmentorum æqualia sunt duobus quadratis ex O H, & ex G O intermedijs segmentis vna cum duplo rectanguli sub differentijs minimæ G E à duabus intermedijs G O, & H O.

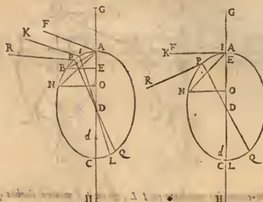


Fiat H a æqualis G E, ergo O a erit differentia ipsarum E H, & G E, sicuti O E est differentia ipsarum G O, & G E. Et quia duo quadrata ex maximo, & ex minimo segmentorum, scilicet ex H E, & ex E G æqualia sunt duplo quadrati ex G D semisse totius, cũ duplo quadrati ex E D intermedia sectione; estque duplum quadrati ex E D semisse ipsius E a æquale duplo rectanguli E O a ex inæqualibus segmentis vna cum duplo quadrati ex intermedia sectione O D, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia sunt his omnibus spatijs, scilicet duplo quadrati ex G D, & duplo quadrati ex D O cum duplo rectanguli E O a, sed duo quadrata ex inæqualibus segmentis G O, & ex O H æqualia sunt duplo quadrati ex semisse totius G D cum duplo quadrati ex intermedia sectione O D, igitur excessus summa quadratorum ex G E, & ex E H; supra summam quadratorum ex G O, & O H æqualis est duplo rectanguli ex E O a, quod erat ostendendum.

LEMMA XV.

IN ellypsi, cuius axis A C, erectus A F, diameter I L, eiusq; erectus I K, & latus C E, & similiter altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, in H O à duobus quadratis ex G O, & ex O H, atque

H, atque aggregatum quadratorum laterum I L, & I K figuræ diametri I L ab aggregato quadratorum laterum P Q, & P R figuræ alterius diametri, vna deficiunt, aut vna æqualia sunt, vel vna excedunt.

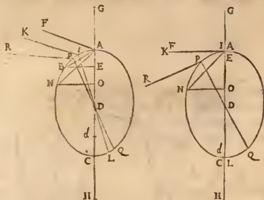


Fiat O d *differentia ipsarum E H, & G O, & primo quia duplum rectanguli ex* d *O H æquale est quadratis ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli* d *O E ad duplum rectanguli* d *O H, seu O E ad H O eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli* d *O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & componendo, erit E H ad H O, seu rectangulum E H A ad rectangulum O H A vt duo quadrata ex G E, & ex E H ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & permutando rectangulum E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex A C, & ex A F eandem proportionem habebit, quàm rectangulum O H A ad quadrata ex G O, & ex H O, vel quadratum A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R, quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K, seu ex A C, & A F æqualia erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.* Lem. 14. huius. 17. huius. Ibidem.

Secundo sit duplum rectanguli d *O H minus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli* d *O E ad duplum rectanguli* d *O H, seu O E ad H O habebit maiorem proportionem, quàm duplum rectanguli* d *O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & rursus componendo ex lem. 2. lib. 5. & ex lem. 14. & permutando, atque ex 17. proposit. huius habebit idem quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K maiorem proportionem, quàm ad duo quadrata ex P Q, & ex P R: quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.*

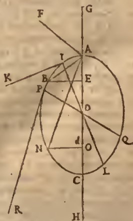
Tertio sit rectangulum d *O H maius duobus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli ex* d *O E ad duplum rectanguli* d *O H, seu O E ad H O habebit*

bebit minorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex O H, & componendo ex lem. 14. permutando, & ex 17. hu-



ius, tandem erunt duo quadrata ex I L, & ex I K maiora duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

SI in ellypsi termini E, O laterum C E, C O, diametrorum I L, & P Q cadant hinc inde à centro D, sitque D O maior quàm D E, dico quod quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt quadratis ex I L, & ex I K.



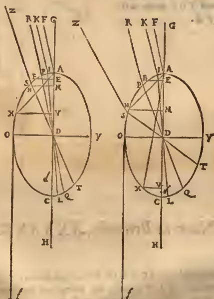
Quia O H minor est, quàm E H, sed duo quadrata ex G O maximo, & O H minimo segmentorum eiusdem rectæ lineæ G H maiora sunt duobus quadratis ex G E, & ex E H intermedijs segmentis; ergo O H ad E H, minor ad maiorem seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A minorem proportionem habet, quàm maior summa quadratorum ex G O, & ex O H ad minorem summam quadratorum ex G E, & ex E H, & permutando rectangulum O H A ad duo quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum
17. huius. *A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R*

minorem

minorem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad duo quadrata ex G E, & ex E H, seu quàm quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K: igitur duo quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, quod erat ostendendum. 17. huius.

Notæ in Proposit. XXXXI.

IN ellypsi, cuius axis maior A C, quia rectangulum A H E ad quadratum H G est, vt quadratum A C ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F, atq; quadratum ex G H ad rectangulum A H M eandem proportio- Prop. 16. huius.

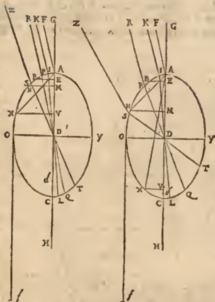


nem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum A C, igitur ex æquali perturbata rectangulum A H E maius ad minus rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F: estque rectangulum A H E maius rectangulo A H M, ergo quadratū ex summa Q P R maius est quadrato ex summa L I K, & propterea linearū sūma Q P R maior erit, quàm sūma L I K, vel quàm summa

ma C A F. Tandem quia rectangulum A H M ad quadratum ex summa H (ex 16. huius.) *M G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum ex Q* (Ibidem.) *P R, sed quadratum ex H C G ad rectangulum ex A H C eandem proportionẽ habet, quàm quadratum ex sũma Y O f ad quadratum A C, (eo quod H C est intercepta comparata diametri Y O, cum Y O secet bifariam ad eam ordinatim applicatam A C, atque ab eodem puncto C perpendicularis ad axim ducta cadat super idem punctum C), igitur ex aquali perturbata rectangulum A H M maius ad minus rectangulum ex A H C eandem proportionem habet, quàm quadratum ex summa Y O f ad quadratum ex summa Q P R, & propterea summa laterum Y O f maior erit, quàm summa Q P R.*

Notæ in Proposit. XXXXVII.

QVia duplum quadrati A C non est maius quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H aquale, aut minus erit quadrato ex summa G H, estque duplum rectanguli ex E H A, vel ex E H M minus duplo quadrati A H, igitur minus quoque erit quadrato ex G H, igitur duplum M H ad G H minorem proportionem habet, quàm G H ad E H, ergo (Lem. 13. huius.) *duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H G M in M H minus est duobus* (Lem. 15. huius.) *quadratis ex G M, & ex H M: quare duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R, & sic duo quadrata ex Q P, & ex P R minora sunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z.*



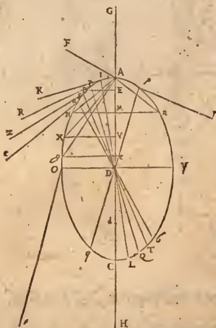
Notæ in Proposit. XXXXVIII.

Quia ex hypotheſi duplum quadrati A C maius eſt quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H maius erit quadrato ex H G. Fiat igitur quadratum ex M H æquale ſemiquadrato G H, & lateris C M fiant duæ diametri Q P, & q p, quarum erecta ſint P R, & p r: Dico duplum quadrati Q P æquale eſſe quadrato ex ſumma laterum Q P R: Quia Q P ad P R eſt vt H M ad M G, & antecedentes ad terminorum ſummas, & eorum quadrata proportionalia erunt, ſcilicet quadratum Q P ad quadratum ex Q P R eandem proportionem habebit, quàm quadratum ex M H ad quadratum ex H G: erat autem quadratum M H ſubduplum quadrati ex H G, igitur quadratum ex P Q ſubduplum eſt quadrati ex Q P R. Eadem ratione quadratum ex q p ſubduplum erit quadrati ex q p r, & diametri Q P, & q p æquales erunt, cum æque recedant ab axi, & habeant commune latus C M. Prop. 7. huius.

Poſtea quià punctum E cadit inter M, & A, erit duplum rectanguli M H E maius duplo quadrati ex M H, ſeu maius quadrato G H, & propterea duplum M H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H E, ergo

 duplum

Lem. 13. *duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G M in M H maius erit*
Lem. 15. *duobus quadratis ex G M, & ex M H, & propterea duo quadrata ex I L, &*
huius. *ex I K simul sumpta maiora erunt duobus quadratis ex Q P, & ex P R.*



Similiter duplum rectanguli E H A maius erit quadrato ex G H, & propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H
Lem. 13. *A, & ideo duplum rectanguli ex differentia ipsarum A H, & G E in E H*
huius. *maius erit duobus quadratis ex G E, & ex E H: igitur duo quadrata ex C A,*
Lem. 15. huius. *& A F maiora erunt duobus quadratis ex I L, & ex I K.*

Rursus quia V H minor est, quàm M H erit duplum rectanguli V H M minus duplo quadrati M H, seu minus quadrato G H, igitur duplum V H ad
Lem. 13 *H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H M, & propterea duplum*
huius. *rectanguli ex differentia ipsarum M H, & G V in V H minus erit duobus*
Lem. 15. *quadratis ex G V, & ex V H, & propterea duo quadrata ex Q P, & ex P*
huius. *R minora erunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z: si verò D V maior fue-*
Lem. 16. huius. *rit quàm D M, erunt duo quadrata ex Q P, & ex P R minora duobus quadratis*

dratis ex T S, & S Z: igitur summa duorum quadratorum ex Q P, & ex P R minor est summa quadratorum duorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri eiusdem ellipsis.

In ellipsi reperire diametrum, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia sint quadratis laterum figuræ axis maioris: oportet autem vt quadratum axis maioris A C maius sit semiquadrato ex summa laterum C A F figuræ eius. PROP. 7. Addit.

Quia ex hypothesi quadratum axis maioris A C maius est semiquadrato ex summa C A F, ergo, vt in nota prop. 48. dictum est, duplum quadrati ex A H maius est quadrato ex H G; fiat duplum rectanguli c H A æquale quadrato ex G H, & lateris C c fiat diameter a b *cuius erectus* a c*. Dico hanc esse diametrum quæsitam:*

Quoniam duplum rectanguli c H A æquale est quadrato ex G H, ergo duplum c H ad H G est vt G H ad H A; eritq; duplum rectanguli ex differentia ipsarum A H, & G c in c H æquale quadratis ex G c, & ex c H, & summa quadratorum ex b a*, & ex* a c *æqualis erit quadratorum summæ ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum.* Lem. 13. Lem. 15.

In eadem ellypsi diametrum reperire, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex summa laterum Q P R. PROP. 8. Addit.

Sit G E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z: erit igitur duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G V in V H æquale quadratis ex G V, & ex V H, ideoque summa quadratorum ex L I, & ex I K æqualis erit quadratorum summæ ex T S, & S Z, quod propositum fuerat. Lem. 13. huius. Lem. 15. huius.

Colligitur similiter ex 7. proposit. additarum, quod in vna ellypsi tres diametri reperiri possunt; quarum summæ quadratorum laterum æquales sint inter se: & ex 8. proposit. additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem ellypsis laterum summæ quadratorum æquales possunt esse inter se, sed oportet vt quadratum axis maioris datæ ellypsis maius sit, quàm dimidium quadrati ex summa laterum figuræ axis C A F.

a Duo latera figuræ axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cæterarum diametrorum, & duo latera figuræ diametri axi proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ remotioris, &c. *Addidi ea, quæ deficere videbantur in hoc textu.*

b Iisdem figuris manentibus cum suis signis ostendatur quod duplum quadrati A C, si non excesserit F, quod diameter est illius figuræ minor, quàm diameter figuræ I L, & diameter figuræ I L, quàm diameter figuræ P Q, &c. *Legendum puto vt in textu apparet.*

c Et sic ostendetur quod si punctum V inciderit super D A, & ostendetur D, & M, &c. *Legendum puto, vt in textu videre est.*

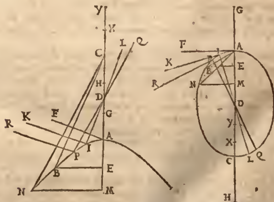
SECTIO

SECTIO DECIMA

Continens Proposit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

XXXXXI. IN hyperbola, & ellipsi, si axis transuersus minor fuerit suo erecto, differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis eius maior est, quàm differentia quadratorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri ei homologæ. Et differentia quadratorum laterum figure homologæ proximioris axi semper maior est in hyperbola, quàm differentia quadratorum laterum figuræ remotioris: at in ellypsi quousque diameter transuersa æqualis non fiat suo erecto. a

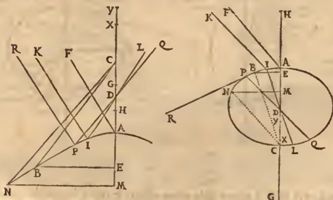
XXXXX. Et in hyperbola differentia quadrati axis inclinati ab eius figura minor erit semidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ sui homologi.



XXXXIX. Si verò in hyperbole axis inclinatus maior fuerit suo erecto, vtique differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis minor erit differentia quadratorum laterum figuræ alterius

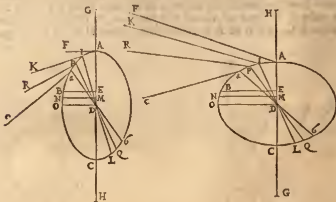
terius homologæ diametri, atque differentia quadrati axis ab eius figura maior erit semidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ suæ homologæ, & minor erit integra differentia eorundem quadratorum.

In sectione A B N sit axis A C maior in figura prima, & in secunda
b minor, sintquè I L, P Q duæ aliæ diametri, quæ in ellipsi cadant inter axim, & vnã æqualium; ducanturque duæ ordinationes A B, A N ad diametros I L, P Q, & duas ad axim perpendiculares B E, N M; sitque A F erectus ipsius A C, & A G, C H duæ interceptæ: ponaturque
c in ellipsi X D æqualis E D, habebit E H ad H A minorem proportionem in prima hyperbola, & maiorem in reliquis, quàm E D ad D A, seu quàm E X, quæ est summa in hyperbola, & differentia in ellipsi ipsarum E G, & E H ad A C differentiam ipsarum H A, A G; & qua-



dratum A C in omnibus figuris ad differentiam quadratorum A C, & A F eandem proportionem habet, quàm quadratum A H ad differentiam duorum quadratorum A H, & G A: atque E H ad H A minorem proportionem habet in duabus primis figuris, & maiorem proportionem in duabus secundis, quàm E G ad G A, comparando homologorum summas, erit E H ad H A, vt E H cum E G ad H A cum G A, nempe aggregatum E H, E G in earundem differentiam ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod est æquale differentiæ duorum quadratorum E H, E G; nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet (in prima ellipsi), & maiorem (in secunda) quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod est æquale differentiæ quadratorum H A, A G, nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum

dratorum duorum laterum figuræ eius ; igitur quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet , in prima ellipsi , & maiorem in reliquis , quam ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ A C; ergo differentia quadratorum duorum laterum figuræ A C minor est in prima ellipsi , & maior in cæteris, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L. Præterea M H ad H E minorem proportionem , aut maiorem habet , quàm M G ad G E : & ponamus in ellipsi Y D æqualem D M , ostendeturquè



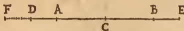
quod M H in H A minus sit in prima ellipsi, & maior in cæteris , quàm duarum M G , M H summa in earum differentiam M Y : & ostendetur quemadmodum dictum est , quod differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L maior est , quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ P Q.

Deinde in hyperbola ponamus I K erectum ipsius I L , erit differentia quadratorum duarum I L , I K (quæ est æqualis K L in summam L I , I K) maior illa , quàm I L in L K , quod est æquale differentiæ quadrati I L , & eius figuræ , nempe differentiæ quadrati A C , & eius figuræ (29. ex 7.) & non est maior in prima, quàm duplum, & in secunda maior duplo , & hoc est propositum.

In Sectionem X. Proposit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

LEMMA XVI.

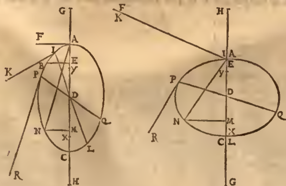
Si recta linea A B bifariam secta in C vtrinque addantur æquales portiones A D, & B E, dico rectangulum sub tota D E, & sub intermedia A B æquale esse differentiæ quadratorum ex A E, & ex A D.



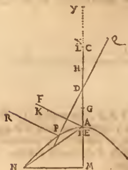
Apponatur F D æqualis D A, vel B E: & quia F D æqualis est B E addita communi B D, erit F B æqualis D E, & ideo rectangulum F B A æquale erit rectangulo sub D E, & sub A B, sed quadratum B D æquale est quadrato D A cum rectangulo F B A, (eo quod F A secta est bifariam in D, & ei in directum additur A B), ergo quadratum D B æquale est quadrato D A vna cum rectangulo sub D E, & sub A B, & propterea rectangulum sub D E, & sub A B contentum æquale est differentiæ quadrati B D, seu A E à quadrato D A, quod erat ostendendum.

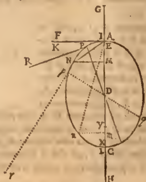
LEMMA XVII.

IN hyperbola, & ellypsi, cuius centrum D, axis A C, erectus A F, præsectæ A H, G C, & in ea diameter I L, cuius erectus

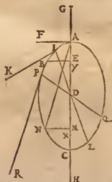


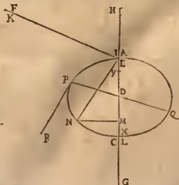
I K, & latus C E, pariterque diameter Q P, cuius erectus P R, eiusque latus C M, si fuerit proportio ipsius H M ad M D eadem proportioni H E ad D E, vel eadem proportioni H A ad D A, erit differentia quadratorum ex lateribus Q P, & ex P R figuræ diametri Q P æqualis differentiæ quadratorum ex lateribus figuræ diametri I L, vel A C: si verò proportio illa minor fuerit erit prior differentia quadratorum maior reliqua, & si illa proportio maior fuerit, erit prima quadratorum differentia minor reliqua.





Fiat D X aqualis D E, & D Y aqualis D M, & primo quia H M ad M D est vt H E ad D E, permutando M H ad H E erit vt D M ad D E, seu vt duplũ M Y ad duplum E X, & sumptis altitudinibus H A, & G H erit rectangulum M H A ad rectangulum E H A vt rectangulum sub Y M, & G H ad rectan-

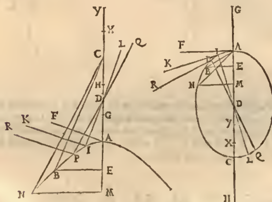




gulum

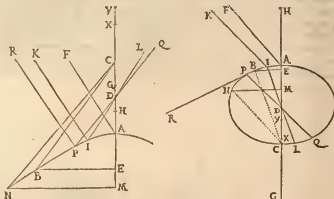
gulum sub E X, & G H, & permutando rectangulum M H A ad rectangulum sub Y M, & G H, seu ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad rectangulum sub E X, & sub G H, seu ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G: est verò quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R, vt rectangulum M H A ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G, pariterque idem quadratum A C ad differentiã quadratorum ex I L, & ex I K est, vt rectangulum E H A ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G, igitur idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R eandem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, & propterea differentia quadratorum ex Q P, & ex P R æqualis est quadratorum differentiæ ex I L, & ex I K, siue æqualis est quadratorum differentia ex A C, & ex A F.

Lem. 16. huius.
Ibidem.
Prop. 20. huius.
Ibidem.



Secundo H M ad M D minorem proportionem habeat, quàm H E ad D E, vt prius permutando habebit H M ad H E minorem proportionem, quàm D M ad D E, seu quàm duplum M Y ad duplum E X, & sumptis communibus altitudinibus H A ad G H, & permutando ex lem. 16. & proposit. 20. huius, idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R minorem proportionem habebit, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quapropter differentia quadratorum ex P Q, & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu maior, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.

Tertio habeat H M ad M D maiorem proportionem quàm H E ad D E: vt prius permutando, sumptis communibus altitudinibus H A, & G H, & denuo permutando ex lem. 16. & prop. 20. huius, sequitur quod idem quadratum



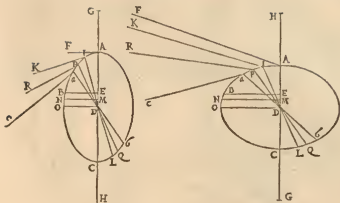
ex A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R maiorem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, siue minor, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F, quæ erant ostendenda.

LEMMA XVIII.

IN ellipsi si diameter a b bifariam secuerit rectam lineam A O terminos axium coniungentem, erit a b æqualis suo erecto a c.

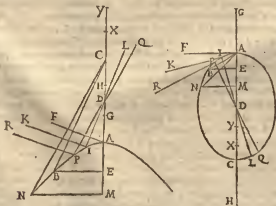
Quia axis A C bifariam diuiditur in centro D ab axi O D perpendiculari ad axim A C, quæ educitur à termino O ipsius A O ordinatim applicata ad Prop. 7. huius. *diametrum a b, habebit diameter a b ad eius erectũ a c eandem proportionem æqualitatis quàm habet H D ad D G, igitur diameter a b æqualis est eius lateri recto a c, quod erat propositum.*

Notæ

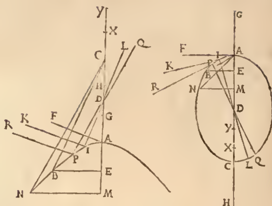


Notæ in Proposit. XXXXIX.

QVia in hyperbola axis A C maior ponitur erecto eius A F, estque A H ad H C vt A C ad A F, ergo præsecta A H maior portio est totius C A, & ideo punctum H cadit inter C, & D, & punctum E cadit inter M, & D, igitur eadem H D ad maiorem D M habebit minorem proportio-



enm



nem, quàm ad minorem D E, & componendo H M ad M D minorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, & ideo differentia quadratorum ex P Q,
Lem. 17. huius. *& ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu maior quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.*

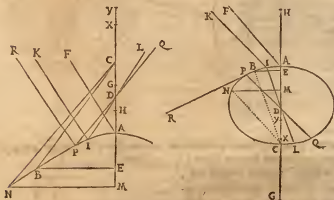
Rursus quia rectangulum C A F maius est quadrato A F, (propterea quod rectangulum illud medium proportionale est inter maius quadratum ex A C, & quadratum minus ex A F), ergo differentia quadrati A C à rectangulo C A F, scilicet differentia spatiorum maximi, & intermedij, minor erit, quàm differentia inter quadratum maximum A C, & minimum A F, sed differentia quadratorum ex A C, & ex A F minor ostensa est, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ergo multo magis differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Tandem quia quadratum A C ad semidifferentiam quadratorum ex I L, &
Prop. 20. huius. *ex I K eandem proportionem habet, quàm rectangulum E H A ad semidifferentiam quadratorum ex E H, & ex E G, vel ad semissem rectanguli ex E X in*
Lem. 16. huius. *G H, vel potius ad rectangulum sub E D, & sub G H; sed quadrati A C à rectangulo C A F differentia ad quadratum ipsum A C, seu differentia A C, & A F ad A C eandem proportionem habet, quàm H G ad H A, seu quàm*
ex Def. 2. huius. *rectangulum E H G ad rectangulum E H A, igitur ex æquali differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad semidifferentiam quadratorum ex I L, & ex I K eandem proportionem habebit, quàm rectangulũ E H G ad rectangulum sub E D, & G H, estq; primũ rectangulũ reliquo rectangulo æquè alto maius, cum eius basis E H maior sit, quàm E D, igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F maior erit, quàm semidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.*

Notæ

Notæ in Proposit. XXXXX.

SI hyperbole axis A C minor fuerit eius erecto A F, quia H M maior est, quàm H E, & punctum H cadit inter D, & A, ergo H M ad H D ma-



iorem proportionem habebit, quàm H E ad eandem H D, & comparando antecedentes ad terminorum summas H M ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu minor quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F. Lem. 17. huius.

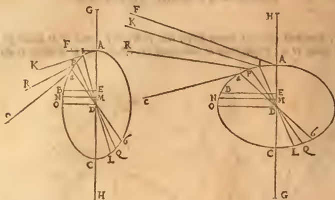
Postea, quia vt in precedenti nota dictũ est, differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad semidifferentiã quadratorũ ex I L, & ex I K eandem proportionẽ habet, quàm rectangulum E H G ad rectangulum sub E D, & sub G H, estque illud rectangulum minus rectangulo isto aquè alto, (cum illius basis E H minor sit, quàm E D), igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor est, quàm semidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Notæ in Proposit. XXXXXI.

IN qualibet ellypsi sit diameter a b æqualis eius erecto a c, eius latus erit C D, & diametri I L, & P Q cadant inter A C, & a b, earum laterum ex Lem. 18. huius.

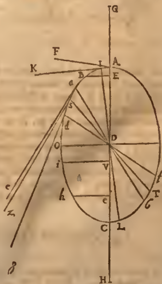
C E, &

C E, & C M, termini E, & M cadent inter D, & A, & M cadat inter E & D, propterea M H ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E



Lem. 17. huius. *ad E D, igitur differentia quadratorum laterum figuræ P Q minor erit differentia quadratorum laterum figuræ I L, vel figuræ A C.*

PROP. 9. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum figuræ eius æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ axis maioris A C.*



Secetur H D in e, *vt H* e *ad* e *D eandem proportionem habeat, quàm H A ad A D, & ex puncto* e *educatur ad axim perpendicularis* e h *occurrens sectioni in* h, *& coniungatur* a h, *quàm bifariam secet diameter* f d, *cuius erectus* d g: *dico diametrum* f d *esse quæsitam. Quia H* e *ad* e *D eandem proportionem habet, quàm H*

Lem. 17. huius. *A ad A D, ergo differentia quadratorum ex* f d, *& ex* d g *æqualis est differentiæ quadratorum ex A C, & ex A F, quod erat propositum.*

PROP. 10. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum eius figuræ æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ*

datæ

datæ diametri I L : oportet autem vt data diameter cadat inter axim maiorem A C , & diametrum a b *æqualem ſuo erecto* a c .

Sit C E latus diametri I L , & diuidatur H D in V , vt habeat H V ad V D eandem proportionem, quàm H E habet ad E D , & ducta vt prius ad axim perpendiculari V X occurrens ſectioni in X , & coniuncta A X , quam biſariam ſecet diameter T S , cuius erectus S Z ; dico hanc eſſe quaſitam . Quoniam H V ad V D eandem proportionem habet , quàm H E ad E D , igitur differentia quadratorum ex T S , & ex S Z æqualis eſt differentia quadratorum ex I L , & ex I K , quod propoſitum fuerat . Lem. 17. huius.

Deducitur ex 9. propoſitione additarum , atque ex propoſit. 51. huius , quod in ellypſi exceſſus quadrati cuiuſlibet diametri tranſuerſa ſupra quadratum erecti eius ſucceſſiue decreſcit ab axi maiori A C vſque ad diametrum a b *æqualem ſuo erecto , atque ab hac diametro defectus quadrati cuiuſlibet tranſuerſa diametri à quadrato erecti eius ſucceſſiue augetur , quouſque perueniatur ad diametrum* f d *, cuius differentia quadratorum figura eius æqualis ſit differentia quadratorum figura axis maioris A C , & vltra diametrum* f d *differentia prædicta ſemper magis augentur quouſque perueniatur ad axim minorem Y O cuius differentia quadratorum figura eius maxima eſt omnium differentiarum inter quadrata laterum figura cuiuſlibet diametri eiuſdem ellypſis.* ex Prop. 50. huius.

Conſtat quoque ex 9. propoſitione additarum , quod in ellypſi tres diametri reperiri poſſunt , quarum differentia quadratorum figurarum laterum earum æquales ſint inter ſe .

Et ex 10. additarum reperiri poſſunt quatuor diametri , quarum differentia quadratorum laterum figurarum earum æquales ſint inter ſe : in hyperbole verò hoc non contingit , nam ab axi differentia quadratorum laterum figura cuiuſlibet diametri ſucceſſiue augentur , ſi axis maior fuerit ſuo erecto , at ſi minor fuerit prædicta differentia quadratorum ſucceſſiue diminuuntur. ex Prop. 49. huius. ex Prop. 50. huius.

a Differentia (8. 15.) duorum quadratorum duorum laterum figuræ axis maior eſt in hyperbola (51.) , & ellypſi , quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ homologæ diametri ſectionis , & differentia homologi proximioris axi maior eſt differentia homologi remotioris : hoc autem ſi axis in hyperbola minor fuerit ſuo erecto (49.) ; ſi verò fuerit maior oppoſitum pronunciandum eſt (50.) , & differentia quadrati axis inclinati , & figuræ eius minor eſt ſemidifferentia quadratorum duorum laterũ figuræ ſui homologi, ſi axis inclinatus minor eſt ſuo erecto (49.) ſi verò fuerit maior exceſſus axis maior erit dimidio exceſſus quadratorum duorum laterum figuræ homologi , & minor quàm tota , &c. *Legendum puto : in qualibet ellypſi, &c. vt in textu apparet .*

b Et ſit P Q in ellypſi vna . . . ., & educamus A B , A N , &c. *Repleui lacunam , vt in textu videre eſt .*

c Ergo E H ad H A minor eſt quàm E D ad D A , nempe E X exceſſus E G , E H ad A C exceſſum H A , A G , & quadratum A C in omnibus figuris ad differentiam duorum quadratorum A G , A F , vt quadratum A H ad differentiam duorum quadratorũ A G , & E H ad H A minor in duabus primis , & maior in duabus ſecundis, quàm E G ad G A, & iungamus ergo E H ad H A , nempe E H ad H A , quàm aggregatum

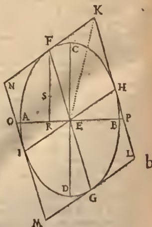
tum E H, E G in ſuum exceſſum ad aggregatum H A, E G in ſuum exceſſum æqualis exceſſui duorum quadratorum E H, E G, nempe quadratum A C ad exceſſum quadratorum duorum laterum figuræ I L minor in prima ellypſi, & maior in ſecunda, quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in eorum exceſſu æqualis, &c. *Hæc omnia corrigi debuiſſe nemo negabit, atque hinc manifeſtum eſt non pauca in textu arabico deſiderari, cum propoſitio 51. vera non ſit abſque determinationibus ſuperius expoſitis.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſit. XXXII. & XXXI. Apollonij.

IN ellypſi, & ſectionibus coniugatis parallelogrammum ſub axibus contentum æquale eſt parallelogrammo à quibuſcunque duabus coniugatis diametris comprehenſo, ſi eorum anguli æquales fuerint angulis ad centrum contentis à coniugatis diametris. a

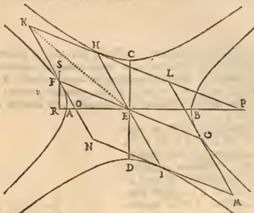
Sint duo axes A B, C D in ellipſi A C B D, ſiue in ſectionibus coniugatis A, B, C, D, & ſint F G, I H aliæ duæ coniugatæ diametri, & ducantur per puncta F, I, G, H, lineæ tangentes coniſectiones, quæ ſibi mutuo occurrant ad puncta K, L, M, N: & producatur A B ex vtraque parte vſque ad tangentes, eaſque ſecet in O, P, & ſit centrum E. Dico quod A B in C D æquale eſt ſpatio parallelogrammo M K: ſit itaque F R perpendicularis ad A B; & ponamus S R mediam proportionalem inter O R, R E.



Et quia quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habet, quàm O R in R E, nempe quàm quadratum S R ad quadratum F R (37. ex 1.) erit A E ad E C nempe quadratum A E ad A E in E C, vt S R ad F R, nempe S R in O E ad F R in O E, & permutando erit quadratum A E, nempe R E in O E (39. ex 1.) b

ad

C ad S R in O E, vt A E in E C ad F R in O E, & quadratum O F ad quadratum E H, nempe triangulum E O F ad triangulum E H P (24. ex 2.) propter similitudinem duorum triangulorum est, vt O R ad R E



(4. ex 7.), & spatium parallelogrammum E K medium proportionale est inter duplum trianguli E O F, & duplum trianguli E H P; & S R media proportionalis est inter O R, & R E, erit duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K, vt S R ad R E; nempe S R in O E ad R E, in O E, quæ ostendetur esse, vt F R in O E, quod est æquale duplo trianguli O F E ad A E in E C; ergo parallelogrammum E K æquale est ipsi E A in E C, & propterea quadruplum illius spatij, quod est parallelogrammum M K æquale est ipsi B A in C D. Et hoc erat propositum.

* Hic est finis libri septimi Apollonij, quemadmodum illum disposui, & puto me præuenisse in hoc quoscunque alios, illumquè reposui in Bibliotheca Domini Nostri Regis Gloriosissimi, Beneficentissimi, Victoriosi; Deus vmbram illius conseruet super omnes famulos eius, & greges, & ad finem perducat omnia illius desideria, & cogitationes, & labor famuli eius sit iuxta eius beneplacitum; & Laus Deo Domino sæculorum, & orationes eius sint super Maumethum, eiusque sequaces. Explicit anno DXIII. scribente Mahamudo filio Masudi Medici Scirazeni decima die di Alkade Anno DCCCXXV.

** In sequẽtibus Paraphrastes Arabicus impiè, & Maumedanorum more loquitur.*

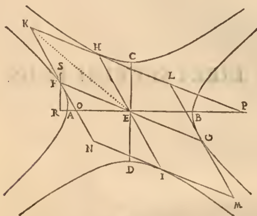
Notæ in Proposit. XXXI. & XXXII.

PLanum axium coniugatarum in ellipsi, &c. *Idest in sectionibus coniugatis, & in ellipsi rectangulum sub axibus coniugatis contentum æquale est parallelogrammo sub diametris coniugatis in angulo æquali, ei qui ad centrum à diametris continetur. In textu arabico reperitur numerus 9. in illa propositione, quæ ellipsim considerat, sed mendosè, vt arbitror debet potius censeri proposit. 32.* a

Et quia quadratum A E ad quadratum E C est, vt O R in R E, nempe quadratum S R ad quadratum F R, &c. *Quoniam axis rectus D C medius proportionalis est inter axim transuersum A B, eiusque latus rectum, quadratum A B ad quadratum D C, vel eorundem quadrantes, scilicet quadratum semiaxis A E ad quadratum semiaxis E C eandem proportionem habebit, quàm axis transuersus A B ad eius latus rectum, sed* Prop. 37. lib. 1. *rectangulum E R O ad quadratum F R eandem proportionem habet, quàm axis transuersus A B ad eius latus rectum, atque quadratum S R æquale est rectangulo E R O (eo quod S R facta fuit media proportionalis inter E R, & R O) erit quadratum S R ad quadratum F R, vt latus transuersum A B ad eius latus rectum: quare quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habebit, quàm quadratum S R ad quadratum F R: & A E ad E C eandem proportionem habebit, quàm S R ad F R: & sumptis altitudinibus A E,* Ibidem. *& O E erit quadratum A E, seu ei æquale rectangulum R E O ad rectangulum A E C, vt rectangulum sub S R, & sub O E ad rectangulum sub F R, & sub O E, & permutando rectangulum R E O ad rectangulum sub S R, & sub O E, seu vt R E ad S R eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A E C ad rectangulum sub F R, & sub O E: & inuertendo rectangulum sub F R, & sub O E ad rectangulum A E C eandem proportionem habet quàm S R ad R E.* b

Et

C Et quadratum F O ad quadratum E H, nempe triangulum E F O ad triangulum E H P, &c. *Quia G F, I H sunt diametri coniugatæ, quibus æquidistant contingentes F O, & L H erunt triangula E O F, & E H P similia, quorum latera homologa O F, & E H; & ideo triangulum E O F ad*



triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm quadratum O F ad quadratum E H: estque O R ad R E, vt quadratum O F ad quadratum E H, igitur triangulum E O F ad triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm O R ad R E. Ducatur postea recta linea E K, erit triangulum E F K medium proportionale inter duo similia triangula E O F, & E H P (eo quod triangulum E O F ad triangulum E F K æquè altum eandem proportionem habet quàm O F ad F K, seu ad latus E H ei homologum) posita autem fuit S R media proportionalis inter O R, & R E; ergo triangulum E O F ad triangulum E F K est vt S R ad R E: estquè parallelogrammum E K æquale duplo trianguli E F K; ergo duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm S R ad R E; Et quia rectangulum sub O E, & sub perpendiculari R F æquale est duplo trianguli E O F (cum habeant basim O E communem, & eandem altitudinem perpendicularis R F); igitur rectangulum sub O E, & sub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habebit, quàm S R ad R E: sed prius rectangulum sub O E, & sub R F ad rectangulum A E C eandem proportionem habebat, quàm S R ad R E: ergo idem rectangulum sub O E, & sub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm ad rectangulum A E C; & propterea parallelogrammum Prop. 4. huius.

mum

mum E K æquale eſt rectangulo A E C; & eorum quadrupla erunt æqualia, ſcilicet parallelogrammum M K æquale erit rectangulo ſub B A, & ſub D C comprehenſo. Quod erat propoſitum.

LIBRI SEPTIMI FINIS.



ARCHIMEDIS

[illegible]

[illegible]

ARCHIMEDIS
LIBER ASSVMPTORVM
INTERPRETE
THEBIT BEN-KORA
EXPONENTE ALMOCHTASSO

Ex Codice Arabico manuſcripto
SERENISS. MAGNI DVCIS ETRVRIÆ,
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS
Latinè vertit.

IO: ALFONSVS BORELLVS
Notis Illuſtrauit.



IO: ALFONSI BORELLI

Præfatio ad Lectorem.



I pulchrum illud Epicharmi effatum tenes (amice Lector) neruos , atque artus esse sapientiæ non temerè , ac imprudenter credere , non adeò facilis esse debes , vt Archimedis nomen lemmata hæc pretiosiora efficiens tibi imposturam , aut fucum facere patiaris , atque alterius contemptissimi auctoris opusculum immeritò tanto viro tribuas ; & siquidem maiores nostri æquum iudicium dixere , vt sine inuidia culpa plectatur , non ita morosus , ac difficilis esse debes , vt sua ei denegare velis leui quacumque suspicione , quæ facilè excuti possit ; verum ab omni præiudicio liberum te cupio , & memorem illius adagij : Ne quid nimis . Tibi igitur sic affecto notionem huius controuersiæ omnino relinquo , quod vt liberè , & ritè exequi valeas , sedato animo nullum meum iudicium interponens , afferam primò rationes , quibus persuaderi quis posset hoc opusculum iniuriâ Archimedi tributum fuisse , & mox coniecturas recensebo , quæ eiusdem Archimedis idipsum opus esse fortè non inaniter probant ; sicque pensitatis, & compositis vtrinque rationum ponderibus sententiam liberè pronuncies tuam per me licet .

Et primò animaduersione dignum est in Collect. Mathemat. Pappi Alexand. frequentissimè commemorari ea , quæ Archimedes conscripsit , præcipuè lib. 5. & lib. 8. De Spiralibus , de Solidis Polyedris , de Circuli Mensura , de Sphæra , & Cylindro , & multoties citantur , & transcribuntur Archimedeæ propositiones , neque vspiam huius Opusculi

(apud Arabes hactenus latentis) mentio vlla fit. Neque Ptol. in Magnæ Constr. lib. 2. tribuit Archimedi prop. 5. cap. 9. ibi relatam, cum tamen soleat esse adeò gratus, vt lib. 6. cap. 7. propositionem ab Archimede sumpsisse fateatur. Neque ipsemet Archimedes huius Opusculi vnquam meminit, qui alioquì valdè prolixè enumerat, & recenset ea, quæ in proprijs libris continentur, & demonstrantur. Inexcusabiles insuper errores, atque allucinationes, quæ in huiusmodi propositionibus reperiuntur, immò puerilia alia Opuscula, quæ citantur vt Archimedis, satis apertè videntur ostendere nunquam diuinum illud ingenium huiusmodi minutias somniasse; cum, vt Carpus Antiochensis ait, referente Pappo, quæ præcipua sunt in Geometria, breuiter quidem, sed diligenter conscripserit Archimedes. Tandem præcipuæ propositiones huius Opusculi similes sunt eis, quæ recensentur quidem, & demonstrantur lib. 4. Collect. Mathem. Pappi Alex., easque Archimedis esse non asserit; immò in quibusdam libris antiquis circumferri affirmat.

Quod verò dictæ rationes tanti roboris, ac efficaciæ non sint, vt penitus euincant huiusmodi Opusculum ab aliquo alio tributum Archimedi fuisse, ex modo dicendis patebit. Et primo optimè norunt, qui in Pappi libris euoluendis vllam operam impenderunt lib. 7. Collect. recensere eum prolixè, & accuratè quamplurima opera Apollonij Pergæi, quorum pars maxima non extat, & enumerare propositiones, & lemmata vsque ad figuras, & tamen qui huiusmodi minutias curat, & adnotat, idem integra opera eiusdem Apollonij non commemorat. Sufficiant hæc insignia specimina. De admirandis astronomicis demonstrationibus à Ptolemæo summopere laudatis lib. 12. cap. 1. Magnæ Constr., ne verbum quidem. De libro Comparationis Dodecaedri, & Icosaedri ab Ypsicle memorato, altum silentium. Si igitur idem Pappus opera Archimedis non ex professo, sed obiter, & sparsim commemorat, mirum non est tacuisse aliqua eius opera, vt sunt hæc lemmata.

Secundò Ptolemæus non affirmat lib. 2. prop. 5. proprio marte à se inuentam fuisse, nec eam Archimedi, aut alicui alij tribuit, quare fieri potuit, vt eam ex libro antiquo desumpserit, à quo nomen Archimedis casu expunctum fuisset, vt postea ostendetur.

Tertiò Archimedes quoque in suis libris existentibus Græcè, & Arabicè non recenset omnia opera à se conscripta, & edita, nam liber de In proh. lib. 8.
insidentibus humido, & de Polyedris recensentur quidem à Pappo, non Lib. 5. pr. 17.
autem ab Archimede. Liber Mechanicus de Sphæropæia nominatur à

Carpo

Carpo Antiochense apud Pappum. Liber de Figuris Isoperimetris asseruatur apud Arabes tantum; non igitur adulterina huiusmodi lemmata erunt, propterea quod Archimedes ea non nominat in paucis libris residuis, & fortè commemorata fuerunt in aliquibus alijs ex multis operibus eius iniuria temporum deperditis. In prob. lib. 8.

Quartò sane negari non possunt euidentissimi errores in hisce demonstrationibus, qui certè lemmatum auctori tribuendi non sunt, vt suis in locis adnotabo; explanatorum enim imperitia sæpenumero propositiones vniuersaliter pronunciatæ violenter in sensu particulari, & deformi exponuntur. Neque mirum est opera antiquorum magni nominis passim, & multis modis deformata fuisse transcriptorum incuria opponendo notas marginales, detrahendo, & superaddendo textui alienas sententias, ac testimonia, & hoc præcipuè in codicibus Arabicis frequentissimè obseruauit Excell. Abrahamus Ecchellensis. Sed nihilominus in tanta transformatione à vetustate, & ignorantia amanuensium profecta vestigium aliquod subobscurum admirandi, & perspicui Archimedis ingenij dignoscitur.

Tandem non inani coniectura ex Pappi, & Eutocij testimonijs probari potest idipsum, quod Arabes ratum habent, scilicet Archimedem huius libelli auctorem fuisse. Et primo aio præter reliqua opera iam nota edidisse Archimedem librum Lemmatum, quod quidem deducitur ex Eutocio in Comment. prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro, vbi ait: Id, quod promiserat se demonstraturum, (*scilicet Archimedes*) in nullis exemplaribus reperire est, quare etiam Dionysodorum deprehendimus nunquam in ea incidisse, adeoque cum non potuerit relictum (*ab Archimede*) lemma attingere diuersam viam suscepit vniuersi problematis, quam deinceps describemus. Diocles porrò idipsum in libro à se de Pyrijs inscripto, promissum fuisse ab Archimede nunquam præstitum opinatus, supplere contendit, cuius conatum mox apponemus, quod & ipsum pariter à superius propositis discedit; itidem enim ac Dionysodorus alia demonstrandi ratione problema struit. IN QVODAM AVTEM VETERI LIBRO (neque enim diuturnæ pepercimus diligentiæ) suprascripta incidimus theoremata haud exiguam tamen habentia obscuritatem præ erratis, multiformiterque mendosa in figurationibus. Eamdem equidem veritatem, quam inquirebamus, atque in parte domesticam Archimedi linguã Doricam seruabant,

vsita-

vſitatiſque pridem rerum nominibus conſcripta erant, quæ nunc parabola, recti coniſectione, quæ hyperbole, obtuſi anguli ſectione vocata; vt ex his ſuſpicari liceat EADEM IPSA FORTEAN ESSE, QVÆ IN FINE SCRIBENDA PROMITTEBANTVR; quare attentius incumbentes, (cum ipſam hypotheſim, qualiter perſcripta fuerat, præ mendarum copia (vt diximus) ſatis incommodam, & abſtruſam reperiremus,) ſenſum inde paucis elijcientes communi, & plana dictione (vt fieri potuit) deſcribimus. Vniuerſaliter autem primum theorema deſcribetur, vt definitis manifeſtetur, deinde reſolutis in problemate accomodabitur. *Inferius*

Præmiſſis autem problematis, quæ hìc apponuntur, ſcilicet duplam eſſe ipſam D B ipſius B F, &c. (*Nota quod hic loquitur de lemmatibus adiunctis*,) *& paulò poſt*; animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt conſonare ijs, quæ nos reſoluimus (*ſcilicet iyſdem adductis lemmatibus*). *Deinde* cum dixerit, quod ſuperius dictum vniuerſaliter habet determinationem, adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam D B duplam eſſe ipſius B F, & ipſam B F maiorem ipſa F H, &c. *Hic manifeſtè Eutocius declarat propoſita lemmata in antiquo codice inuenta Archimedis fuiſſe.*

Hæc igitur conſentanea verbis Archimedis, qua fieri potuit, dilucidè expoſuimus.

Conſtat ergò ex Eutocij ſententia librum antiquum ab eo repertum, & recognitum, eſſe opus Archimedis, licet titulo Auctoris caruerit, & mendoſiſsimum eſſet, atque ignotum Dionyſodoro, Diocli, & plerìſque Græcorum diù iacuiſſet; etenim ex ſtylo, ex ſubiecto promiſſo, ex lingua Dorica, & ex vocibus vetuſtis Archimedi familiaribus concluſit lemmata prædicta Archimedis fuiſſe. Sed adhuc difficultas hæret, nam licet concedamus ſcripſiſſe Archimedē, & edidiſſe librum lemmatum ab Eutocio memoratum, diuerſus omnino erit ab eo, quem Thebitius Arabicè tranſtulit, nam in iſto non reperitur lemma illud, quod promiſerat Archimedes ſe demonſtraturum.

Hæc difficultas duplici coniectura ſi non frangi, ac reſolui ſaltem debilitari poteſt; liber enim antiquus lemmatum Archimedis ne dum titulo carebat ſuo, ſed erat valdè corruptus, deficiens, & mendoſus; quarè non ſine diuturno, ac pertinaci labore ſenſus illius lemmatis elicere potuit

Eutо-

Eutocius, vnde fieri potuit vt Græcus codex ad Arabes transmissus deterior, & magis mutilus adhuc fuerit eo exemplari, in quod incidit Eutocius, vel potius incuria, aut vitio librariorum Arabum, & amanuensium eiusdem codicis quamplurima lemmata perierunt, inter quæ assumptum in prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro excidit. E contrà aliquæ propositiones similes eis, quæ leguntur in hoc Arabico codice de Arbelo extant apud Pappum lib. 4. Collect. prop. 14. 15. & 16., quas ait circumferri in quibusdam libris antiquis, scilicet in libro Græco incerti Auctoris propositiones lemmaticas continente; at testimonio Thebitij magni nominis viri, & omnium Arabum, liber ex Græco translatus continens ferè eadem lemmata, quæ recensentur à Pappo, tribuitur Archimedi, sicuti prius Eutocius multiplici coniectura libri antiqui lemmatum à se reperti Archimedem auctorem fecit; quare ergo nos eisdem coniecturis persuasi eidem Achimedi tribuere dubitabimus Opusculum hoc ab Arabibus asseruatum, in quo si mendarum copiam spectes, simile omnino erit ei, quod Eutocius nactus est? Hæ sunt rationes, mi lector, quas tibi examinandas relinquo in hoc perplexo negotio nulla dissimulata difficultate.

Interim scito hoc manuscriptum Arabicè elegantissimè exaratum in Bibliotheca Serenissimi Magni Etruriæ Ducis diù asseruatum fuisse; eius tamen editionis spe facta tandem anno 1658. Serenissimus Ferdinandus Secundus Magnus Etruriæ Dux Romæ asportandum humanissimè mihi credidit, vt rei litterariæ bono latinè traduceretur, præstitumque fuit opera, & studio celeberrimi, & peritissimi Orientalium linguarum professoris Abrahami Ecchellensis, ipsoque dictante religiosissimè, & accuratè ipse calamo excepi, in eoque paucula quædam in notis animaduertenda censui tum in contextu plurimis mendis corrupto, tum in scholijs Arabicis Almochtasso non admodum in Geometria versati. Addidi in fine huius libri duas alias Archimedis propositiones ab Eutocio repertas quarum altera fortasse illa eadem est quæ hic deficit, nam Almochtasso in proemio ait, propositiones huius Opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit decimaquinta. Et licet hæc eadem lemmata anno præterito edita fuerint Londini, non tamen hac nostra editione fraudandus es, amice lector. Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS

CVIVS OPEM IMPLORAMVS.

LIBER ASSVMPTORVM ARCHIMEDIS,

INTERPRETE THEBIT BEN-KORA,

Et exponente Doctore

ALMOCHTASSO ABILHASAN,
Halì Ben-Ahmad Nosuensi.

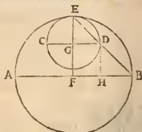
PROPOSITIONES SEXDECIM.



Sserit Doctor Almochtasso hunc librum referri ad Archimedem, in quo sunt propositiones pulcherrimæ paucæ numero, vtilitatis verò maximæ de principijs Geometriæ, optimæ atque elegantissimæ, quas adnumerant professores huius scientię summæ intermediorum, quæ legi oportet inter librum Euclidis, & Almagestum; at verò quædam illius propositionum loca indigent alijs propositionibus, quibus propositiones illæ clariores euadant. Et quidem ipse Archimedes has indicauit propositiones, easque retulit in alijs suis operibus, dum dixit quemadmodum demonstrauimus in propositionibus rectangulorum: item & quemadmodū demonstrauimus in nostra expositione agentes de triangulis; rursus quemadmodum demonstrauimus in propositionibus quadrilaterum; & retulit in propositione quinta demonstrationem hac de re magis peculiarem. Deinde composuit Abusahal Alkuhi librum, quem inscripsit ordinationem libri Archimedis de assumptis, & tractauit demonstrationem huius propositionis via vniuersaliori, ac meliori, nec non ea, quę dependent ex compositione proportionis, quod quidē cum id comperi, attexui locis obscurioribus huius libri expositionem, seu marginales postillas, & confirmaui quod ille indicauerat propositionibus, vti iudicaueram, & retuli ex propositionibus Abisahal duas propositiones, quibus opus est ad propositionem quintā declarandam, reliquas omittens breuitatis gratia, & eo quod non sint necessarię.

PROPOSITIO I.

SI mutuo ſe tangant duo circuli, vt duo circuli A E B, C E D in E, fuerintque eorum diametri parallelæ, vt ſunt duæ diametri A B, C D, & iungantur duo puncta B, D, & contactus E [lineis] D E, B D, erit linea B E recta.



Sint duo centra G, F, & iungamus G F, & producamus ad E, & educamus D H parallelam ipſi G F. Et quia H F æqualis eſt ipſi G D, ſuntque G D, E G æquales, ergo ex æqualibus F B, F E remanebunt G F, nempe D H, & H B, quæ erunt æquales, atque duo anguli H D B, H B D æquales. Et quia duo anguli E G D, E F B ſunt recti, atq; duo anguli E G D, D H B ſunt æquales, remanebunt duo anguli G E D, G D E, qui inter ſe, & duobus angulis H D B, H B D æquales erunt; ergo angulus E D G æqualis eſt angulo D B F, & comprehenſus angulus G D B eſt communis, ergo erunt duo anguli G D B, F B D (qui ſunt pares duobus rectis) æquales duobus angulis G D B, G D E: igitur ipſi quoque ſunt æquales duobus rectis, ergo linea E D B eſt recta, & hoc eſt, quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

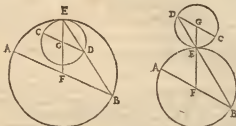
DIcit Doctor; Et quidem dici poteſt cum duo anguli H D B, H B D ſint æquales, & angulus D H B rectus, quod erit angulus B D H ſemirectus, & ſimiliter angulus E D G, & angulus G D H rectus, ergo tres anguli ſunt æquales duobus rectis, igitur linea E D B eſt recta. Idem ſequitur, ſi illi duo circuli ſe mutuo exterius contigerint.

Notæ in Propoſit. I.

HAEc eſt vna earum Propoſitionum, quas Pappus in quodam libro antiquo reperit, qui, vt deduximus ex Eutocio, ab Archimede conſcriptus diu apud Arabes latuit. Hac aſſumitur in propoſit. 14. lib. 4. Collect. Pappi, eamque ſupplet Commandinus, ſed extat expreſſe lib. 7. propoſit. 110. eiuſdem Pappi, eſtque demonſtratio vniuerſaliſſima comprehendens caſum neglectum in hac demonſtratione, ſcilicet quando duo circuli ſeſe exterius contingunt, &

licet

licet non laboret vitio Arabici textus, non tamen illa omnino sincera est: conueniunt tamen in vniuersalitate propositionis, quàm valde peruersè scholiastes Arabicus exposuit; allucinatur enim quando ait, & quia duo anguli E G

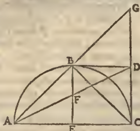


D, & E F B sunt recti, &c. *Nam inferius citatur, & vsurpatur hac prima propositio vniuersalissimè, scilicet existentibus angulis G, & F acutis, vel obtusis, & sic reuera sonant verba propositionis, vbi ait,* quorum diametri A B, C D sunt parallelæ, *& sic pariter habetur in prædicta propositione Pappi; quare textus omnino corrigi debuit, vt pronuncientur anguli E G D, & E F B æquales, non recti. Nescio tamen quomodo expositio Almochtassi excusari possit, qui supponit diametros A B, & C D perpendiculares ad rectam lineam F G E, quod quidem in vnico casu verificatur, vt dictum est. Peccat postea demonstratio Pappi lib. 7. pr. 110., vbi conatur ostendere duo centra, & punctum contactus circulorum esse in vnica recta linea; quod quidem in 3. Element. Eucl. ostensum supponi debuerat.*

PROPOSITIO II.

SIt C B A semicirculus, quem D C, D B tangant, & B E perpendicularis super A C, & iungamus A D, erit B F æqualis ipsi F E.

Demonstratio. Iungamus A B, eamque producamus in directum, & educamus C D, quousque illi occurrat in G, & iungamus C B. Et quia angulus C B A est in semicirculo, erit rectus, remanet C B G rectus, & D B E C est parallelogrammum rectangulum, ergo in triangulo G B C rectangulo educitur perpendicularis B D ex B erecta super basim, & B D, D C erunt æquales, eo quod tangunt circulum, ergo C D est etiam æqualis ipsi D G, quemadmodum ostendimus in propositionibus,



quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo G A C linea B E educta est parallela basi, & iam educta est ex D semipartitione basis linea D A secans parallelam in F, erit B F æqualis ipsi F E, & hoc est quod voluimus.

G B D F A E C

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor: Quod autem C D sit æqualis ipsi D G, vti remittit ad suum librum de propositionibus rectangulorum, eo quod duo anguli D C B, D B C æquales sunt propter æqualitatem D B, D C, & angulus D B C cum angulo D B G est rectus, & similiter angulus D C B cum angulo C G B: necesse est, vt sint duo anguli D G B, D B G æquales etiam, ergo duo latera D B, D G sunt æqualia.

Rursus si dicatur quod proportio C D ad D B sit vt proportio D B ad D G, & D C æqualis ipsi D B, ergo D B æqualis est D G, esset parabola. Dicit, quod vero B F sit æqualis F E, hoc constat ex eo quod casus A D super duas lineas B E, G C parallelas in triangulo A G C, exigit eorum sectio in eadem proportione, & id quidem, quia A D ad A F eandem proportionem habet, quam G D ad B F, & quam D C ad E F, ergo G D ad B F est vt D C ad E F, & permutando G D ad ei æqualem D C, est vt B F ad E F, & propterea ipsæ etiam sunt æquales.

Notæ in Propos. II.

Hvius secundæ propositionis expositio, & demonstratio insigniter deformata est; in propositione enim supponuntur duæ rectæ D C, D B tangere circulum tantummodo, non autem constituere angulum rectum, & solummodo recta linea B E perpendicularis ducitur ad diametrum A C, quare male in demonstratione pronunciatur quadrilaterum B D C E parallelogrammum rectangulum, cum ferè semper sit Trapetium: pariterque errat, quando ait rectam B D perpendicularem esse super C G, quæ nunquam vera sunt, nisi in vnico casu, quando scilicet B E cadit perpendiculariter super centrum circuli.

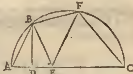
Interim notandum est hanc elegantem propositionem, insignem vsum habere pro inuestigatione mensuræ circuli, & rectarum in eo subtensarum; deduci namque possunt non contemnenda problemata; Si enim quis cupiat circulo adscribere duas figuras ordinatas similes, quarum circumscripta superet inscriptam excessu minori quolibet dato, facile problema absoluetur, pariter-

G B D F A E C

pariterque proportio diametri ad circuli peripheriam satis compendiosè deduci potest, quandoquidem inter figuram ordinatam eidem circulo inscriptam, cuius semilatus est E B, & circumscriptam duplo laterum numero, cuius duo semilatera sunt C D B, circulus intermediat; & Perimeter circumscriptæ figuræ ad Perimetrum inscriptæ eandem proportionem habet, quam diameter C A ad A E, quæ proportio minui semper magis, ac magis potest in infinitum; & tandem ex 3. propos. sequenti, ex continua semipartitione quadrantis circuli elici possunt subtensæ successiuè subdiuisæ in infinitum, & propterea dabitur proportio diametri A C ad semisubtensam B E, sed datur quadratum ipsius B E, igitur datur rectangulum A E C sub segmentis diametri, & datur E C ex iam dicta 3. propos. igitur datur quoque E A; estque B E ad C D B, vt E A ad diametrũ A C, igitur quarta quantitas innotescet, scilicet recta C D B, quæ æqualia sunt vni lateri Poligoni circumscripti duplo laterum numero, & ideo habebitur mensura totius Perimetri tum Poligoni inscripti, cum circumscripti, quare mensura ipsius peripheriæ circuli, quæ intermedia est, facili negotio inuestigabitur.

PROPOSITIO III.

SIt C A segmentum circuli, & B punctum super illud vbicumque, & B D perpendicularis super A C, & segmentum D E æquale D A, & arcus B F æqualis arcui B A, vtique iuncta C F erit æqualis ipsi C E.

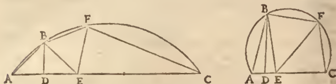


Demonstratio. Iungamus lineas A B, B F, F E, E B; & quia arcus B A æqualis est arcui B F, erit A B æqualis B F, & quia A D æqualis est E D, & duo anguli D sunt recti, & D B communis, ergo A B æqualis est B E, & propterea B F, B E sunt æquales; & duo anguli B F E, B E F sunt æquales. Et quia quadrilaterum C F B A est in circulo, erit angulus C F B cum angulo C A B ipsi opposito, immo cum angulo B E A, æqualis duobus rectis; sed angulus C E B cum angulo B E A, æquales sunt duobus rectis, ergo duo anguli C F B, C E B sunt æquales, & remanent C F E, C E F æqualas; ergo C E æqualis est C F, & hoc est quod voluimus.

Notæ in Proposit. III.

HAEc est propos. 5. cap. 9. lib. 1. Almag. Ptol., sed hic vniuersalius pronunciatur; Ptolomeus enim supponit segmentum A B C semicirculum esse, & ex cognita circumferentia A F, & corda F C, & illius medietate A B, quærit chordam A B; est enim rectangulum sub C A D æquale quadrato ipsius

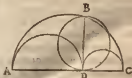
ipsius A B, estque nota A D medietas differentiæ inter diametrum A C, & chordam differentia F C; at propositio Archimedea verificatur in quolibet circuli segmento siue maiori, siue minori; ex datis enim circumferentijs A C, A B,



A F, & F C vna cum cordis A C, & F C, haberi quidem potest chorda A B paulo difficilius, si nimirum ex chorda A C tollatur chorda F C, & differentia A E bifariam secetur in D, & ex arcu cognito B C datur angulus A, atque angulus D rectus est, ergo triangulum A B D specie notum erit, & propterea proportio D A ad A B cognita erit, estque D A longitudine data, igitur A B longitudine innotescet.

Notandum est quod figura apposita in hac propos. non exprimit omnes casus propositionis, quandoquidem semicirculus est A B C, & propterea ex precedentibus erroribus Arabici expositoris suspicari licet non ritè eum percepisse Archimedis mentem.

PROPOSITIO IV.



A B C semicirculus, & fiant super A C diametrum duo semicirculi, quorum vnus A D, alter vero D C, & D B perpendicularis, vtique figura prouenіens, quam vocat Archimedes ARBELON, est superficies comprehensa ab arcu semicirculi maioris, & duabus circumferentijs semicirculorum minorum, est æqualis circulo, cuius diameter est perpendicularis D B.

Demonstratio. Quia linea D B media proportionalis est inter duas lineas D A, D C, erit planum A D in D C æquale quadrato D B, & ponamus A D in D C cum duobus quadratis A D, D C communiter, fiet planum A D in D C bis cum duobus quadratis A D, D C, nempe quadratum A C, æquale duplo quadrati D B cum duobus quadratis A D, D C, & proportio circulorum eadem est, ac proportio quadratorum, ergo

ergo circulus, cuius diameter eſt A C, æqualis eſt duplo circuli, cuius diameter eſt D B cum duobus circulis, quorum diametri ſunt A D, D C, & ſemicirculus A C æqualis eſt circulo, cuius diameter eſt D B cum duobus ſemicirculis A D, D C; & auferamus duos ſemicirculos A D, D C communiter, remanet figura, quàm continent ſemicirculi A C, A D, D C, & eſt figura, quàm vocauit Archimedes Arbelos æqualis circulo, cuius diameter eſt D B, & hoc eſt quod voluimus.

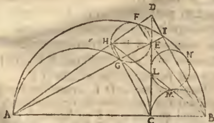
Notæ in Propoſit. IV.

HAEc forſan eſt vna earum propoſitionum, quas Pappus legit in libro antiquo de menſura ARBELI, ſeu ſpatij à tribus ſemicircumferentijs circulorum comprehenſi, vt ait Proclus, quæ quidem elegantiſſima eſt, eiuſque inuentionis Lunula Hyppocratis Chij originem extitiſſe puto; eſt enim Hyppocratis Lunula ſuperficies plana à quadrante peripheriæ circuli maioris, & ſemiſſe peripheriæ circuli ſubdupli comprehenſa: Arbelus vero recentiorum eſt ſpatium à triente, & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulorum æqualium comprehenſum, & hiſce duobus ſpatijs faciſe quadrata æqualia reperiri poſſunt; at Arbeli Archimedis, & Procli hucuſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari circulus prædicto ſpatio æqualis.

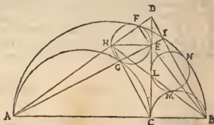
PROPOSITIO V.

SI fuerit ſemicirculus A B, & ſignatum fuerit in eius diametro punctum C vbicumque, & fiant ſuper diametrum duo ſemicirculi A C, C B, & educatur ex C perpendicularis C D ſuper A B, & deſcribantur ad vtraſque partes duo circuli tangentes illam, & tangentes ſemicirculos, vtique illi duo circuli ſunt æquales.

Demonſtratio. Sit alter circulorum tangens D C in E, & ſemicirculum A B in F, & ſemicirculum A C in G, & educamus diametrũ H E, erit parallela diametro A B, eo quod duo anguli H E C, A C E, ſunt recti, & iungamus F H, H A, ergo linea A F eſt recta, vti dictum eſt in propoſitione 1. & occurrent A F, C E in D, eo quod egrediuntur ab angulis



A, C



A, C minoribus duobus rectis, & iungamus etiam F E, E B, ergo E F B est etiam recta, vti diximus, & est perpendicularis super A D, eo quod angulus A F B est rectus, quia cadit in semicirculum A B, & iungamus H G, G C, erit H C etiam recta; & iungamus E G, G A, erit E A recta, & producamus eam ad I, & iungamus B I, quæ sit etiam perpendicularis super A I, & iungamus D I; & quia A D, A B sunt duæ rectæ, & educta ex D ad lineam A B perpendicularis D C, & ex B ad D A perpendicularis B F; quæ se mutuo secant in E, & educta A E ad I est perpendicularis super B I, erunt B I D rectæ, quemadmodum ostendimus in Propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis: & quia duo anguli A G C, A I B sunt recti, vtique B D, C G sunt parallelæ, & proportio A D ad D H, quæ est vt A C ad H E, est vt proportio A B ad B C, ergo rectangulum A C in C B æquale est rectangulo A B in H E; & similiter demonstratur in circulo L M N, quod rectangulum A C in C B æquale sit rectangulo A B in suam diametrum, & demonstratur inde etiam, quod duæ diametri circulorum E F G, L M N, sint æquales, ergo illi duo circuli sunt æquales. Et hoc est quod voluimus.

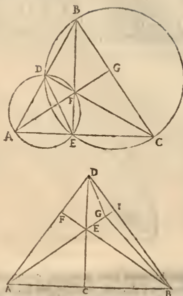
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

DIcit Doctor. Clarum quidem est quod citauit ex expositione triangulorum rectangulorum in præfatione; & est quidem propositio vtilis in principijs, ac præsertim in triangulis acutangulis, qua opus est in proposit. 6. huius libri, & est hæc. Ex triangulo A B C eduxit perpendiculares B E, C D se mutuo secantes in F, & coniunxit A F, & produxit ad G, hæc vtique erit perpendicularis super B C.

Iungamus itaque D E, erunt duo anguli D A F, D E F æquales, quia circulus comprehendens triangulum A D F transit per punctum E, eo quod angulus A E F est rectus, & cadent in illo super eundem arcum, & etiam angulus D E B æqualis est angulo D C B, quia circulus continens triangulum B D C transit etiam per punctum E, ergo in duobus triangulis A B G, C B D sunt duo anguli B A G, B C D æquales;

& an-

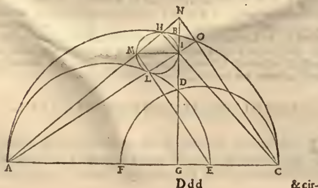
& angulus B est communis, ergo A G B æqualis est angulo C D B recto, ergo A G est perpendicularis super B C. Hoc præmisso repetamus ex proposit. quàm attulit Archimedes D A, A B, & perpendiculares D C, A I, B F, B I, & lineam D I. iam si B I D non fuerit linea recta, iungamus B G D rectam, erit angulus A G B rectus ex præmissa propositione, & erat angulus A I B rectus, ergo internus in triangulo B I G æqualis est opposito externo, & hoc est absurdum, igitur linea B I D est recta. Deinde attulit duas propositiones ex interpretatione Alkauhi, quarum prima est hæc.



SCHOLIVM PRIMVM ALKAVHI.

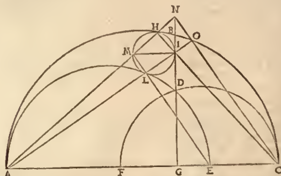
SI non fuerint duo semicirculi tangentes, sed mutuo se secantes, & perpendicularis fuerit in loco mutuæ sectionis, idem sequitur.

Sint itaque semicirculi A B C, A D E, F D C, & duo illi semicirculi se mutuo secantes in D, & B G perpendicularis super A C insistat,



 & cir-

& circulus I H L tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L, & perpendicularem in I. Dico esse æqualem circulo, qui est in altera parte. Hoc modo, Educamus I M parallelam ipsi A C, & iungamus A H, quæ transibit per M, quemadmodum demonstrauit Archimedes, Prop. 1. huius.



& producamus eam quousque occurrat perpendiculari N G in N, & iungamus I A, quæ transibit per L, & producamus illam ad O, & iungamus C O, O N, quæ erit linea recta, & iungamus M E, quæ transibit per L, & iungamus C H, quæ transibit per I; & linea C O N parallela est lineæ I: M, & proportio A N ad N M, nempe proportio A G ad I M est vt C A ad C E, ergo rectangulum A G in C E æquale est rectangulo C A in I M; & quia G D est perpendicularis in duobus circulis C D F, E D A super duas diametros C F, E A, erit rectangulum C G in G F æquale quadrato G D, & rectangulum A G in G E æquale etiam est illi, ergo rectangulum C G in G F æquale est rectanlo A G in G E, & proportio C G ad G A est vt proportio E G ad G F, immo vt proportio C E ad F A residuam; ergo rectangulum C G in F A, est æquale rectangulo C A in I M cui æquale est rectangulum G A in C E. Et si fuerit in altera parte circulus modo præfato eadem ratione ostendemus, quod rectangulum C A in diametrum illius circuli æquale sit rectangulo C G in A F, & ostendetur quod duæ diametri duorum circulorum sint æquales,

SCHOLIVM SECVNDVM ALKAVHI.

POrrò secunda est hæc. Dicit quod si duo semicirculi non sint tangentes, nec se mutuo secantes, sed separati, & perpendicularis transeat per concursum duarum linearum tangen-

tium

tium eos, quæ sunt æquales idem sequetur.

Sint itaque semicirculi A B C, A D E, F G C, vti disposuimus, & duæ lineæ N G, N D tangentes illos duos semicirculos in G, D, & æquales, sibique occurrentes in N, & linea B N transiens per punctum N perpendiculariter erecta super A C, & tangat illam circulus M N I in I, & idem tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L,

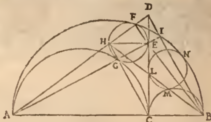
& educamus diametrum I M parallelam ipsi A C, & iungamus C H, quæ transibit per I, & iungamus M E transibit per L, & iungamus A I transibit per L, & producamus eam ad P, & iungamus C O transibit per P, eritque parallela ipsi E M, & erit proportio A O ad O M, nempe proportio A N ad M I vt proportio A C ad C E, & rectangulum A N in C E æquale rectangulo A C in I M. Et eodem modo ostendetur, quod rectangulum C N in F A sit æquale rectangulo A C in diametrum circuli, qui est ex altera parte; & quia rectangulum C N in N F æquale est quadrato G N, & est æquale quadrato D N, quod est æquale rectangulo A N in N E erit rectangulum C N in N F æquale rectangulo A N in N E, & proportio C N ad A N vt E N ad N F, & vt proportio totius C E ad totum A F, ergo rectangulum A N in C E æquale est rectangulo C N in F A, & iam ostensum est, quod A N in C E æquale est rectangulo A C in I M, & quod rectangulum C N in F A sit æquale rectangulo A C in diametrum alterius circuli: ergo duæ diametri sunt æquales, & duo circuli æquales, & hoc est quæsitum.

Prop. 1. huius. Ibidem. Scholium præc. Almoc.

Notæ in Proposit. V.

HAEc propositio parum quidem differt à postrema parte proposit. 14. 16. & 17. lib. 4. Pappi Alex., si figuram, constructionem, & progressum demon-

demonstrationis species; differunt tamen in conclusione, quæ demonstranda proponitur; ostendit enim Pappus, sicut, & Archimedes, semicircularis diametri segmentum maius A C ad circuli intercepti diametrum H E habere eandem proportionem, quàm maioris circuli diameter A B habet ad reliquum segmentum eius B C, pariterque B A ad A C eandem proportionem habet,



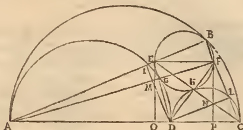
quàm C B ad reliqui circuli intercepti L M N diametrum: ex hisce sequitur conclusio Archimedea, nam si A C ad H E eandem rationem habet, quàm A B ad B C, permutando B A ad A C erit vt C B ad H E igitur eadem C B ad duas circulorum diametros H E, & L N eandem proportionem habet, & propterea circulorum diametri H E, & L N æquales sunt inter se. Mirum tamen est hanc conclusionem, quàm præ manibus Pappus habebat, non animaduertisse, demonstrat tamen quamplurima symptomata pulcherrima circulorum in Arbelo descriptorum, quæ tamen in hoc opusculo Archimedi tributo pariter recenseri debebant, si hic liber esset idem antiquus ille à Pappo visus, in quo huiusmodi lemmata circumferebantur: sed forsan librariorum vitio, & incuria codex corruptissimus ad Arabes transmissus non omnes illas admirandas propositiones, sed vnius tantum particulam continebat, sicut è contra liber ille antiquus, in quo Pappus prædicta lemmata reperit, carebat conclusione in hisce lemmatibus demonstrata. Cæterum propositiones in scholijs additæ manifestæ quidem sunt, sed absque duabus prioribus posset propositum facillimè demonstrari, Reliqua duæ propositiones superadditæ ad Arabibus faciles quidem sunt.

PROPOSITIO VI.

SI fuerit semicirculus A B C, & in eius diametro sumatur punctum D, & fuerit A D ipsius D C sexqui altera, & describantur super A D, D C duo semicirculi, & ponatur circulus E F inter tres semicirculos tangens eos, & educatur diameter E F in illo parallela diametro A C, reperiri debet proportio diametri A C ad diametrum E F.

Iungamus enim duas lineas A E, E B, & duas lineas C F, F B, erunt C B, A B rectæ, vti dictū est in prima proposit. Describamus etiam duas lineas F G A, E H C, ostendeturque esse quoque rectas; Similiter duas lineas D E, D F, & iungamus D I, D L, & E M, F N, & producamus eas ad O, P; Et quia in triangulo A E D, A G est perpendi-

pendicularis ad E D, & D I est quoque perpendicularis ad A E, & iam se mutuo secuerunt in M, ergo E M O erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quàm confecimus de proprietatibus triangulorum, & cuius demonstratio iam quidem præcessit in supe-



riori propositione; Similiter quoque erit F P perpendicularis super C A, & quia duo anguli, qui sunt apud L, & B sunt recti, erit D L parallela ipsi A B, & pariter D I ipsi C B, igitur proportio A D ad D C est vt proportio A M ad F M, immo vt proportio A O ad O P, & proportio C D ad D A vt proportio C N ad N E, immo vt proportio C P ad P O, & erat A D sexquialtera D C, ergo A O est sexquialtera O P, & O P sexquialtera C P, ergo tres lineæ A O, O P, P C sunt proportionales: & in eadem mensura, in qua est P C quatuor, erit O P sex, & A O nouem, & C A nouendecim; & quia P O æqualis est E F, erit proportio A C ad E F vt nouendecim ad sex, igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit A D ad D C qualiscumque vt sexquitertia, aut sexquiquarta, aut alia, erit iudicium, & ratio, vti dictum est. Et hoc est quod voluimus.

Notæ in Proposit. VI.

HAEc propositio nil prorsus differre videtur à 16. proposit. lib. 4. Pappi Alex. est tamen pars illius, & particulariter demonstrata, quod quidem peccatum alicui expositori tribui debet; nunquam enim Archimedes propositionẽ illam, quam vniuersalissimè demonstrare potuisset, exemplis numericis tam pueriliter ostendisset. Pappus igitur quærit mensuram diametri illius circuli, qui in loco inter tres circunferentias circulares interijcitur, quod Arbelon appellatur, & ostendit quidem diametrum semicirculi maioris A C secari in duobus punctis O, & P à perpendicularibus cadentibus à terminis E, & F diametri circuli in Arbelo inscripti, ac diuidi in tria segmenta A O, O P, P C continue proportionalia in eadem ratione, quàm habet A D ad D C, & insuper

ſuper oſtendit perpendicularem E O æqualem eſſe circuli diametro E F. Itaque in quadrato ſpatio E O P F, circuli diameter E F, ſiue O P media proportionalis erit inter A O, & P C. Quam ergo proportionem habent tres continuè proportionales in eadem ratione A D ad D C ſimul ſumpta ad illarum intermediam, eandem habebit diameter maioris ſemicirculi A C ad O P, ſiue E F. Quæ deinde Pappus demonſtrat perpendiculares à centris circulorum in collateralibus ſpatijs prædicti Arbeli exiſtentium eſſe multiplices diametrorum eorum circulorum à quibus educuntur ſecundum ſeriem naturalem numerorum ab vnitate creſcentium, proprietas quidem eſt admirabilis, de qua in hac propoſitione Archimedis altum ſilentium, quod forte temporum iniuriæ tribuendum eſt.

Poſſent in hiſce duabus propoſitionibus non pauca problemata ſuperaddi, quomodo nimirum in prædicto ſpatio à tribus ſemicirculis comprehenſo circuli innumerabiles deſcribi debeant, & alia quamplurima facilia, quæ lectorum ſagacitati relinquuntur.

PROPOSITIO VII.

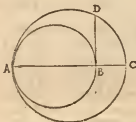
SI circulus circa quadratum deſcriptus fuerit, & alius intra illum, vtique erit circumſcriptus duplus inſcripti.

Sit itaque circulus comprehendens quadratum A B, circulus A B, & inſcriptus C D, & ſit diameter quadrati A B, & eſt diameter circuli circumſcripti, & educamus C D diametrum circuli inſcripti parallelam ipſi A E, quæ eſt ei æqualis. Et quia quadratum A B duplum eſt quadrati A E, ſiue D C, & proportio quadratorum ex diametris

metris circulorum eſt eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus A B duplus eſt circuli C D, & hoc eſt quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor Almochtaſſo. Iam compoſui tractatum de conficiendo circulo, cuius proportio ad datum circulum ſit vt proportio data. Qua ratione conficiendæ ſunt omnes figuræ rectilineæ, & quem vſum habeant in arte illæ figuræ, & afferam hic ex illis vnam propoſitionem, quæ cõgruit expoſitioni huius propoſitionis, & eſt tanquam epitome illarum propoſitionum, & illationis ex illis, & eſt hæc. Volumus conficere circulum, qui ſit quinta pars circuli, exempli gratia.



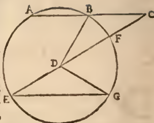
Circulus cuius habemus diametrum eſt A B, & addamus eius partem quintam, & eſt B C, & deſcribamus ſuper A C ſemicirculum A D C, & educamus perpendicularem B D, & quia proportio A B ad B C eſt, vt proportio quadrati A B ad quadratum B D, erit quilibet circulus factus, vel, figura ſuper B D quæſita à nobis, & hoc, quia proportio circuli, qui eſt ſuper A B, vel figuræ, quæ eſt ſuper illam, ad circulum, vel figuram factam ſuper B D facit illam figuram, & ſimiliter poſitam, erit vt proportio A B ad B C, & hoc eſt quod voluimus.

PROPOSITIO VIII.

Si egrediatur in circulo linea A B vbicumque, & producatur in directum, & ponatur B C æqualis ſemidiametro circuli & iungatur ex C ad centrum circuli, quod eſt D, & producatur ad E, erit arcus A E triplus arcus B F.

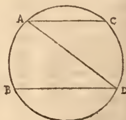
Educa-

Educamus igitur E G parallelam ipsi A B, & iungamus D B, D G: & quia duo anguli D E G, D G E sunt æquales, erit angulus G D C duplus anguli D E G, & quia angulus B D C æqualis est angulo B C D, & angulus C E G æqualis est angulo A C E, erit angulus G D C duplus anguli C D B, & totus angulus B D G triplus anguli B D C, & arcus B G æqualis arcui A E, triplus est arcus B F, & hoc est, quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor Almochtasso. Cum dicit arcum B G æqualem esse arcui A E, id ex eo est propter æquidistantiam duarum cordarum. Sint itaque in circulo A B C cordæ A C, B D parallelæ; Dico quod duo arcus A B, C D sunt æquales,

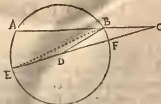


Iungamus A D, ergo duo anguli C A D, A D B sunt æquales; & propterea duo arcus sunt æquales, & conuersum eodem modo demonstratur.

Notæ in Proposit. VIII.

HAEc quidem propositio elegantissima est, quæ si problematicè resolui posset via plana, reperta iam esset tripartitio cuiuslibet anguli.

Breuius tamen demonstratio perfici potest hac ratione. Iuncta recta E B, quia in triangulo Isoscele B D C duo anguli C, & C D B æquales sunt, estque pariter externus angulus B D C duplus anguli D E B in triangulo Isoscelio D E B, ergo angulus C duplus est anguli B E C, & propterea illi anguli simul sumpti, seu externus angulus A B E triplus erit anguli B E F, & circunferentia A E tripla ipsius B F.

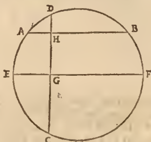


PRO-

PROPOSITIO IX.

SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D, (ſed non in centro) ad angulos rectos, vtique duo arcus A D, C B ſunt æquales duobus arcubus A C, D B.

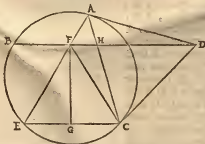
Educamus diametrum E F parallelam ipſi A B, quæ ſecet C D biſariam in G, erit E C æqualis ipſi E D; & quia tam arcus E D F, quam E C F eſt ſemicirculus, & arcus E D æqualis arcui E A cum arcu A D, erit arcus C F cum duobus arcubus E A, A D æqualis ſemicirculo, & arcus E A æqualis arcui B F, ergo arcus C B cum arcu A D æqualis eſt ſemicirculo, & remanent duo arcus E C, E A nempe arcus A C cum arcu D B æquales illi, & hoc eſt quod voluimus.



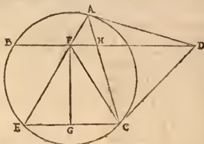
PROPOSITIO X.

SI fuerit circulus A B C, & D A tangens illum, & D B ſecans illum, & D C etiam tangens, & educta fuerit C E parallela ipſi D B, & iuncta fuerit E A ſecans D B in F, & educta fuerit ex F perpendicularis F G ſuper C E; vtique biſariam ſecabit illam in G.

Iungamus A C, & quia D A eſt tangens, & A C ſecans circulum erit angulus D A C æqualis angulo cadenti in alterno ſegmento A C



nempe angulo A E C, & eſt æqualis angulo A F D, eo quod C E, B D ſunt parallelæ, ergo anguli D A C, A F D ſunt æquales, & in duobus triangulis D A F, A H D ſunt duo auguli A F D, H A D æquales, & angulus D communis, propterea erit rectãgulum F D in D H æquale

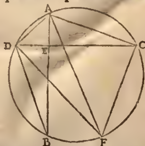


quadrato D A, immo quadrato D C, & quia proportio F D ad D C eſt eadem proportioni C D ad D H, & angulus D communis, erunt triangula D F C, D C H ſimilia, & angulus D F C æqualis D C H, qui æqualis eſt angulo D A H, & hic eſt æqualis angulo A F D, ergo duo anguli A F D, C F D ſunt æquales, & D F C æqualis angulo F C E, & erat D F A æqualis angulo A E C, ergo in triangulo F E C ſunt duo anguli C, E æquales, & duo anguli G recti, & latus G F commune, propterea erit C G æqualis ipſi G E, ergo C E biſariam ſecatur in G, & hoc eſt, quod voluimus,

PROPOSITIO XI.

SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D ad angulos rectos in E, quod non ſit in centro, vtique omnia quadrata A E, B E, E C, E D æqualia ſunt quadrato diametri.

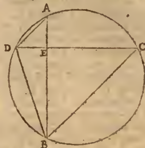
Educamus diametrum A F, & iungamus lineas A C, A D, C F, D B; Et quia angulus A E D eſt rectus, erit æqualis angulo A C F, & angulus A D C æqualis A F C, eo quod ſunt ſuper arcum A C, & remanent in duobus triangulis A D E, A F C duo anguli C A F, D A E æquales erunt pariter duo arcus C F, D B æquales immo, & duæ cordæ eorum æquales, & duo quadrata D E, E B æquantur quadrato B D, nempe C F, & duo quadrata



quadrata A E, E C æquantur quadrato C A, & duo quadrata C F, C A æquantur quadrato F A, nempe diametri, igitur quadrata A E, E B, C E, E D omnia sunt æqualia quadrato diametri, & hoc est quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

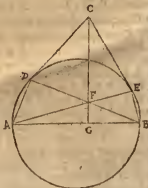
Dicit Doctor. Huius est alia facilior demonstratio ea, quam attulit Archimedes; quæ est huiusmodi. Iungamus A D, C B, B D; & quia angulus B E D est rectus, erunt duo anguli E B D, E D B æquales vni recto, & duo A D, B C, æquales semicirculo, ergo duæ cordæ eorum in potentia sunt æquales diametro; sed duo quadrata A E, D E æqualia quadrato A D, & duo quadrata C E, B E sunt æqualia quadrato C B, ergo quadrata A E, E B, C E, E D æqualia sunt quadrato diametri; & hoc est quod voluimus.



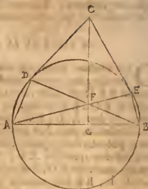
PROPOSITIO XII.

Si fuerit semicirculus super diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, E, & iunctæ fuerint E A, D B se muto secantes in F, & iuncta fuerit C F, & producatur ad G, erit C G perpendicularis ad A B.

Iungamus D A, E B. Et quia angulus B D A est rectus, erunt duo anguli D A B, D B A reliqui in triangulo D A B æquales vni recto, & angulus A E B rectus, igitur sunt æquales ei, & ponamus angulum F B E communem, ambo anguli D A B, A B E sunt æquales F B E, F E B, immo angulo D F E externo in F B E. Et quia C D est tangens circulum, & D B secans illum, angulus C D B æquatur angulo D A B, & pariter angulus C E F æquatur angulo E B A, ergo duo anguli C E F, C D F simul æquales sunt angulo D F E. Et iam quidem planum fit ex nostro tractatu de figuris quadrilateris, quod si educan-



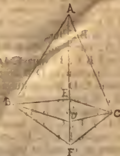
tur inter duas lineas æquales sibi occurrentes in aliquo puncto, vti sunt duæ lineæ C D, C E, duæ lineæ se mutuo secantes, vti sunt duæ lineæ D F, E F, & fuerit angulus ab illis contentus vt est angulus F æqualis duobus angulis, qui occurrunt duabus [lineis] se inuicem secantibus, vti sunt duo anguli E, D simul, erit linea egrediens à puncto concursus ad punctum sectionis, vti est linea C F æqualis cuilibet linearum sibi occurrentium, vt C D, vel C E, propterea erit C F æqualis ipsi C D, ergo angulus C F D est æqualis angulo C D F, nempe angulo D A G, sed angulus C F D eum angulo D F G est æqualis duobus rectis, ergo angulus D A G cum angulo D F G æqualis est duobus rectis, & remanent in quadrilatero A D F G duo anguli A D F, A G F æquales duobus rectis, sed angulus A D B rectus est, ergo angulus A G C est rectus, & C G perpendicularis ad A B, & hoc est quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor de demonstratione, quàm citat ex tractatu de figuris quadrilateris. Sint duæ lineæ æquales sibi occurrentes A B, A C, & punctum concursus A, & se inuicem secantes B D, D C, & punctum sectionis D, & sit angulus B D C æqualis duobus angulis A B D, A C D, & iungamus A D; Dico quod sit æqualis A B.

Alioquin vel est minor A B, vel maior illa, & sit maior, & abscindatur A E æqualis A B, & iungamus B E, ergo duo anguli A E B, A B E sunt æquales; sed angulus A E B maior est angulo A D B, & pariter angulus A E C, qui est æqualis A C E maior est angulo A D C, omnes ergo anguli B E C, vel duo anguli simul A B E, B C E maiores sunt duobus angulis A B D, A C D, pars suo toto, quod est absurdum. Deinde sit A D minor quàm A B, & ponamus A F æqualem A B, & iungamus B F, F C, remanet, vt dictum est, quod angulus F,



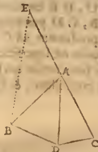
immo

immo duo anguli A B F, A C F minores sint duobus angulis A B D, A C D, totum sua parte, & hoc est absurdum, ergo manet propositum.

Notæ in Proposit. XII.

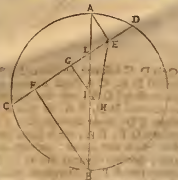
Lemma assumptum in demonstratione huius pulcherrima propositionis potest directè ostendi hac ratione.

Si in quadrilatero A C D B duo latera A C, & A B aequalia fuerint, atque angulus C D B aequalis duobus angulis C, & B simul sumptis. Dico rectam A D ipsi A C, vel A B aequalē esse. Producatur C A, in E, vt A E fiat aequalis A B, iungaturque B E, Quia in triangulo Isosceleo B A E angulus E aequalis est angulo A B E, & angulus C D B aequalis est duobus angulis C, & D B A simul sumptis, ergo duo anguli C D B, & E (oppositi in quadrilatero C D B E) aequales sunt tribus angulis C, D B A, & A B E, seu duobus angulis C, & D B E, sed quatuor anguli quadrilateri E C D B aequales sunt quatuor rectis, ergo duo anguli oppositi E, C D B duobus rectis aequales sunt, & propterea quadrilaterum ipsum circulo inscribi potest, cuius circuli centrum erit A, cum tres rectæ lineæ C A, A B, A E aequales posita sint, & propterea A D radius quoque circuli erit aequalis ipsi C A.



PROPOSITIO XIII.

SI mutuo se secent duæ lineæ A B, C D in circulo, & fuerit A B diameter illius, at non C D, & educantur ex duobus punctis A, B duæ perpendiculares ad C D, quæ sint A E, B F, vtique abscindent ex illa C F, D E æquales.



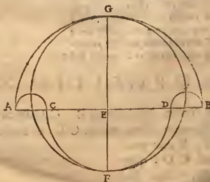
Iungamus E B, & educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem I G super C D, & producamus eam ad H in E B. Et quia I G est perpendicularis ex centro ad C D illam bifariam diuidet in G, & quia I G, A E sunt duæ perpendiculares super illam, erunt paral-

lelæ.

lelæ, & quia B I æqualis eſt I A, erit B H æqualis ipſi H E, & propter earum æqualitatem, & quia B F eſt parallela ipſi H G, erit F G æqualis ipſi G E, & ex G C, G D æqualibus remanent F C, E D æquales. Et hoç eſt quod voluimus.

PROPOSITIO XIV.

SI fuerit A B ſemicirculus, & ex eius diametro A B diſſectæ ſint A C, B D æquales, & efficiantur ſuper lineas A C, C D, D B ſemicirculi; & ſit centrum duorum ſemicirculorum A B, C D punctum E, & ſit E F perpendicularis ſuper A B, & producatur ad G: vtique circulus, cuius diameter eſt F G æqualis eſt ſuperficiei contentæ à ſemicirculo maiori, & à duobus ſemicirculis qui ſunt intra illum, & à ſemicirculo medio qui eſt extra illum, & eſt figura, quam vocat Archimedes Salinon.

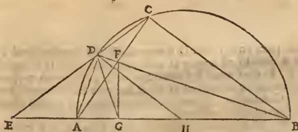


Quia D C bifariam ſecatur in E, & addita eſt illi C A, erunt duo quadrata D A, C A dupla duorum quadratorum D E, E A, ſed F G æqualis eſt ipſi D A, ergo duo quadrata F G, A C dupla ſunt duorum quadratorum D E, E A: & quia A B dupla eſt A E, & C D dupla quoque E D, erunt duo quadrata A B, D C quadrupla duorum quadratorum D E, E A, immo dupla duorum quadratorum G F, A C ſimiliter etiam duo circuli, quorum diametri ſunt A B, D C dupli ſunt eorum, quorum diametri ſunt G F, A C, & dimidij eorum, quorum diametri ſunt A B, C D æquales duobus circulis, quorum diametri ſunt G F, A C, ſed circulus, cuius diameter A C, eſt æqualis duobus ſemicirculis

micirculis A C, B D, ergo si auferamus ex illis duos semicirculos A C, B D, qui sunt communes, remanet figura contenta à quatuor semicirculis A B, C D, D B, A C, (quæ ea est, quàm vocat Archimedes Salinon) æqualis circulo, cuius diameter est F G, & hoc est quod voluimus.

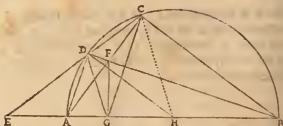
PROPOSITIO XV.

SI fuerit A B semicirculus, & A C corda Pentagoni, & semissis arcus A C sit A D, iungatur C D, & producatur vt cadat super E, & iungatur D B, quæ secet C A in F, & ducatur ex F perpendicularis F G super A B, erit linea E G æqualis semidiametro circuli.



Iungamus itaque lineam C B, & sit centrum H, & iungamus H D, D G, & A D. Et quia angulus A B C, cuius basis est latus Pentagoni, est duæ quintæ partes recti, quilibet duorum angulorum C B D, D B A est quinta pars recti, & angulus D H A duplus est anguli D B H, ergo angulus D H A est duæ quinte partes recti. Et quia in duobus triangulis C B F, G B F duo anguli B sunt æquales, & G, C recti, & latus F B commune, erit B C æquale ipsi B G: & quia in duobus triangulis C B D, G B D duo latera C B, B G sunt æqualia, & similiter duo anguli ad B, & latus B D commune, erunt duo anguli B C D, B G D æquales, & quilibet eorum est sex quintæ partes recti, & est æqualis angulo D A E externo quadrilateri B A D C, quod est in circulo, ergo remanet angulus D A B æqualis angulo D G A, & erit D A æqualis ipsi D G. Et quia angulus D H G est duæ quintæ partes recti, & angulus D G H sex quintæ partes recti, remanet angulus H D G duæ quintæ partes recti, & erit D G æqualis G H. Et quia A D E externus quadrilateri A D C B, quod est in circulo, est æqualis angulo C B A, & est duæ

duæ quintæ partes recti, & æqualis angulo G D H. Et quia in duobus triangulis E D A, H D G sunt duo anguli E D A, H D G æquales, & pariter duo anguli D G H, D A E, & duo latera D A, D G, erit E A æquale H G, & ponamus A G commune, erit E G æquale A H, & hoc est quod voluimus,



Et hinc patet, quod linea D E æqualis sit semidiametro circuli, quia angulus A æqualis est angulo D G H, ideo erit linea D H æqualis lineæ D E. Et dico quod E C diuiditur media, & extrema proportione in D, & maius segmentum est D E: & hoc quia E D est corda hexagoni, & D C decagoni, & hoc iam demonstratum est in libro elementorum, & hoc est quod voluimus.

Impie vt Mahumetanus Paraphrastes loquitur.

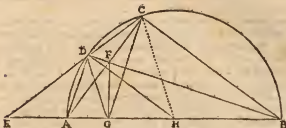
Finis libri Assumptorum Archimedis. Laus Deo soli, & orationes eius sint super Dominum nostrum Mahometum, & suos socios.

Notæ in Proposit. XV.

Ex hac propositione non pauca colligi possunt; Si enim coniungantur rectæ lineæ C H, & C G, erit triangulum B C E isoscelium simile triangulo H D E, & similiter positum; pariterque triangulum H C G simile quidem erit ipsi G D A, & in vtrisque bases similiter secantur, nam angulus B C E in tres partes æquales diuiditur à rectis lineis H C, & G C, quarum qualibet duæ quintæ partes est vnius recti, atque angulus E C G rursus bifariam diuiditur à recta C A: non secus tres anguli E D A, A D G, & G D H æquales sunt inter se, atque quilibet eorum duæ quintæ vnius recti. Et efficiuntur quatuor rectæ lineæ E A, A D, D G, D C, inter se, & lateri decagoni regularis circulo inscripti æquales. Pari modo rectæ lineæ E D, E G, G C, H C, H A, æquales sunt inter se, & lateri hexagoni regularis circulo inscripti. Tandem recta linea C B subtendens tres partes decimas circumferentiæ totius circuli æqualis est recta lineæ C E, scilicet composita ex latere hexagoni, & latere decagoni regularium eidem circulo incsriptorum. Præterea

recta

recta linea E G ſecatur in A extrema, ac media ratione, cuius maius ſegmentum eſt E A latus decagoni, & recta A H ſimiliter diuiditur in G, cuius maius ſegmentum eſt G H decagoni latus, & tota E H ſecatur in A, & G extrema, ac media ratione, pariterque recta E B ſimiliter ſecatur in H, cuius



minus ſegmentum H B eſt æquale lateri exagoni circulo inſcripti. Breuius tamen propoſitio ſic demonſtrari poſſet.

Quia oſtenſa eſt C D æqualis D G, & A D æqualis eſt eidem D C; tum ambo ſint latera decagoni, ergo D G æqualis eſt D A. Poſtea iuncta A C, quia angulus A H D, vel C H D quinta pars eſt duorum rectorum, ergo angulus C D H ad baſim iſoſcelij, duæ quintæ partes erit duorum rectorum, & ideo angulus C D H duplus erit anguli D H E, eſtque externus angulus C D H æqualis duobus internis, & oppoſitis D H E, & D E H in triangulo D E H, ergo angulus C D H duplus quoque erit reliqui anguli E, & propterea angulus D H E æqualis erit angulo E, & ſubtenſa latera D E, D H æqualia quoque erunt, ſed prius D A, D G æqualia erant ſubtendentia angulos æquales, & reliqui anguli eiuſdem ſpeciei ſunt, igitur E A æqualis eſt H G. Reliqua manifeſta ſunt.

In præfatione huius operis memini non eſſe omnino improbabile hunc libellum Archimedis non alium fuiſſe ab illo antiquo lemmatum libro ab Eutocio reperto, quod præcipuè ex verbis eiuſdem Eutocij in Comment. propoſit. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro comprobatum fuit: illa fideliſſimè tranſlata ex textu Græco ab amicis doctiſſimis cum iam in præfatione excuſa eſſent aliam tranſlationem ex Arabico Manuſcripto Sereniſſimi Magni Ducis miſit Excell. Abrahamus Ecchellenſis deſumptam ex editione Abuſahli Alkuhi qui pariter librum ordinationis lemmatum Archimedis conſcripſit, vt in proemio huius operis teſtatur Almochtaſſo. Verba eius ſunt hæc, quæ paulò clarius propoſitum confirmare videntur: & meminit Eutocius Aſcalonita in Comment. huius libri, quod Archimedes promiſerit demonſtrationem huius in hoc ſuo libro, quod in nullo exemplari reperitur, quod promiſit. Atque ita vnuſquiſque tam Dyoniſodorus, quàm Diocles poſt illum progreſſus eſt per aliam viam, quàm ille (ſcilicet Archimedes) in hoc libro in diuiſione Sphæræ in duas partes, quæ datam habeant proportionem. Dixit, & ego reperi in

Veteri Libro Theoremata satis obscura propter multitudinem errorum, qui in eo sunt, nec non menda, quæ occurrunt in figuris propter ignorantiam amanuensium, erantque in eo Doricæ dictiones, quarum vsus Archimedi familiaris erat, & vocabula ipsi propria; hinc vtebatur loco sectionum parabolæ, & hyperbolæ, rectanguli, & obtusanguli coni sectionibus quamobrem operam ipsi nauaui, donec assecutus sum istam propositionem, & est ista, &c.

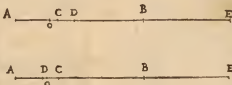
Modo quia in prædicto libro antiquo ab Eutocio reperto recensentur duæ propositiones, quarum vnam promiserat se demonstraturum Archimedes, & vtraque in nostro opusculo iniuria temporum deficit: earum altera forsan erit 16. illa propositio in proœmio ab Almochtaßo numerata vbi ait propositiones huius opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit 15. quare inutile forsan non erit eas hic reponere, præcipuè quia Eutocius non rite eas restituit, nec omninò repurgauit à mendis, quibus scatebat exemplar antiquum ab ipso inuentum. Et primo noto, quod Eutocius eas vocat theoremata, cum potius problemata sint, & sic etiam ab eodem Eutocio postmodum appellantur. Forsan hoc accidit, quia in libro illo antiquo in formam theorematum scripta erant, sed Eutocius vt ad propositionem Archimedis ea accomodaret, forma problematica ea exposuit. Rursus Eutocius primum theorema se expositurum pollicetur, vt deinde analysi problematis Archimedei accomodetur. Vnde conijcere licet alterum theorema additum, vel alteratum ab Eutocio, vel ab aliquo alio fuisse, in quo proponit, quod, si aliqua recta linea secta sit in duo segmenta, quorum vnum duplum sit alterius, solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato maioris, & sub minore segmento maximum erit omnium similium solidorum, quæ ex diuisione eiusdem rectæ lineæ in quolibet alio eius puncto consurgunt. Et hoc quidem ostenditur per sectiones conicas, contra artis præcepta; peccatum enim est non paruum apud Geometras, problema planum per conicas sectiones resoluere cum via plana absolui possit, hoc autem præclari nonnulli viri pariter adnotarunt, & præstiterunt, vt nuper accepi.

PROPOSITIO XVI.

SI recta linea A B sit tripla A C, non vero tripla ipsius A D; Dico parallelepipedum rectangulũ contentum sub quadrato C B in A C maius esse parallelepipedo sub quadrato D B in A D.

Producatur A B in E, vt sit B E æqualis B C. Quoniam B C dupla erat ipsius A C, erit E C quadrupla ipsius A C, & propterea rectangulum A C E æquale erit quadruplo quadrati A C, scilicet æquale erit quadrato C B: Est vero in primo casu, rectangulum A D E maius rectangulo A C E, in secundo vero minus, (eo quod punctum D in primo casu propinquius est semipartitioni totius A E, quàm C, in secundo verò remotius); igitur si fiat C D ad D O, vt quadratum C B ad rectangulum

gulum A D E, erit in primo casu D O maior, quàm C D, in secundo vero minor; & propterea A O minor erit, quàm A C in vtroque casu. Et quia quadratum C B ad rectangulum A D E est vt C D ad D O, igitur solida parallelepipeda reciproca erunt æqualia, scilicet solidum qua-



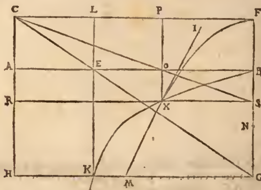
drato C B in D O ducto æquale erit solido, cuius basis rectangulum A D E, altitudo vero C D, seu potius æquale erit solido, cuius basis rectangulum E D C, altitudo vero A D, & propterea vt quadratum B C ad rectangulum E D C, ita erit reciproce A D ad D O, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in primo casu, & ad eorundem summas in secundo casu, erit quadratum B C ad quadratum D B vt A D ad A O, & denuo solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato B C in A O æquale erit ei, cuius basis quadratum D B, altitudo vero A D: Est vero A O ostensa minor, quàm A C in vtroque casu, igitur parallelepipedum, cuius basis quadratum B C, altitudo A C maius est eo, cuius basis est idem quadratum B C, altitudo A O; ideoque parallelepipedum, cuius basis quadratum B C, altitudo A C maius est quolibet parallelepipedo, cuius basis quadratum B D, altitudo A D: quare patet propositum.

PROPOSITIO XVII.

SIt A B tripla ipsius A E, maior vero quàm tripla alterius C A, secari debet eadem A B citra, & vltra E, in O, ita vt parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale sit parallelepipedo, cuius basis quadratum E B, altitudo A C.

Fiat rectangulum A C B F, & producantur latera C A, F B, & fiat rectangulum C F N æquale quadrato E B, & ducta diametro C E G com-

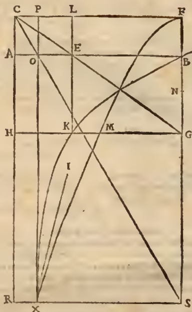
Prop.52. lib.1. pleantur parallelogramma rectangula A L, A K, L B, B K, atque axe F G, latere recto F N describatur parabole F M secans H G in M; erit Prop.11. lib.1. igitur in parabola quadratum M G æquale rectangulo G F N sub abscissa, & latere recto contento, ideoque idem quadratum F G ad rectangulum N F G, atque ad quadratum M G eandem proportionem habebit: est vero quadratum F G ad rectangulum N F G, vt F G ad F N, cum



F G sit illorum altitudo communis, nec non vt C F G ad C F N sumpta nimirum C F communi altitudine, ergo rectangulum C F G ad C F N eandem proportionem habebit, quam quadratum F G ad quadratum M G, & permutando rectangulum C F G ad quadratum F G erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, sed vt rectangulum C F G ad quadratum F G, ita est C F ad F G, & E A ad A C, igitur E A ad A C erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, seu vt quadratum E B, vel K G ad quadratum G M: est vero A C minor, quàm A E; quæ triens est totius A B, igitur M G minor est, quàm G K. Postea Prop.4. & 12. lib.2. per B circa asymptotos A C F describatur hyperbole B K, quæ transibit per punctum K, cum parallelogramma A F, & C K æqualia sint propter diagonalem C E G, quare punctum M paraboles cadet intra hyperbolem B K, sed parabole F M occurrit asymptoto C F in vertice F, & occurrit etiam asymptoto C A in aliquo alio puncto, cum C Prop.26. lib.1. A sit parallela axi F G paraboles, & hyperbole semper intra asymptotos ex 1.& 2. lib.2. incedat, igitur parabola F M bis hyperbolæ occurrit supra, & infra punctum M: sint occursus X, à quibus ductis parallelis ad asymptotos compleantur parallelogramma R P, & A F, quæ erunt æqualia inter asym-Prop.12. lib.2. ptotos, & hyperbolen constituta, & propterea C O S parallelogrammorum diameter erit, & vna linea recta: & quia O A ad A C est vt C F ad F S, siue vt rectangulum C F N ad rectangulum S F N: erat autem quadratum E B æquale rectangulo C F N ex constructione, & quadratum

tũ O B, siue X S in parabola æquale est rectangulo S F N, ergo A O ad A C est vt quadratum E B ad quadratum O B, & propterea parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale erit parallelepipedo base quadrato E B, altitudine A C contento, quod erat propositum.

Prop. 11. lib. 1.



Ex hisce propositionibus deducit insuper Eutocius aliqua, quæ non omnino firma, & certa mihi videntur, nam ex eo quod recta linea vt I X tangit vtramq; conisectionem (hyperbolen scilicet B X, & parabolen F X) in eodem puncto X concludit hyperbolen interius contingere parabolen quàm deinceps non secat ad easdem partes axis illius. Hoc autem omnino necessarium nõ est ex demonstratis à me in prop. 20. 21. & 22. Addit. lib. 6. Apoll. fieri enim potest vt Parabole exterius hyperbolen tangat in X, & postea hinc inde eam secet. Potest insuper hyperbole secare eandẽ parabolam in eodem puncto X, licet ambo in eodem puncto tangantur ab aliqua recta linea, vt est I X; quod quidem adnotasse fuit operepretium.

F I N I S.

Dominus Carolus de Datis videat, & referat an in hoc opere sit aliquid quod repugnet fidei Catholicæ, & bonis moribus. Die 3. Iulij 1660.

Vinc. de Bardis Vicar. Gener. Florent.

Illustrissime, ac Reuerendiss. Dom.

Vidi hæc antiquorum, maximorumq; Geometrarum Apollonij, atq; Archimedis Opera nunquam edita, nec in ijs reperi aliquid fidei Catholicæ, & bonis moribus aduersum; Quamobrem maximo Reip. literariæ bono, & gloria eorum qui in ijs vertendis, atq; illustrandis studium, atque operam felicissimè collocarunt euulganda censeo: dummodo quædam loca notentur Arabicorum interpretum, quibus Maumedanos se præbent. Florentiæ die 7. Iulij 1660.

Carolus Dati manupropria.

Imprimatur seruatis seruandis 7. Iulij 1660.

Vinc. d. Bardis Vicar. Gener. Flor.

Excellentiss. Aduocatus Dominus Augustinus Coltellini S. Offic. Florentiæ Consultor videat hoc opus intitulatum APOLLONII PERGÆI, &c. & referat.
Die 7. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Offic. Flor. Canc. de mand.

Reuerendiss. Pater Domine.

Duorum Geometriæ luminum monumenta, quæ diu in tenebris sepulta, adeò studiosorum oculos latuerunt, vt inter deperdita frustra desiderarentur, & nunc Opera Clariss. Virorum, versa, & illustrata in lucem prodeunt remoranda non puto; cum etsi Ethnico fonte cadant, nihil tamen (salutaribus monitis Arabica interpretum superstitione detecta) aduersus Christianam pietatem contineant.

August. Coltellini S. Officij Consultor, & librorum censor.

Stante supradicta attestatione Imprimatur. Die 16. Iulij 1660.

Fr. Ang. Octau. de Populo S. Off. Florent. Cancell. demand.

Alexander Victorius Senator Sereniss. Magni Ducis Auditor.

REGISTRVM.

* ** *** **** A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sf Tt Vu Xx Yy Zz
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff

Omnes sunt duerni, excepto * qui est ternus.

Errata præcipua sic corrige.

PAgina 7. linea 27. ad margine. prop. 3 huius. pag. 14. lin. 4. ad differentiam. p. 24. l. 21. marg. prop. 2. addit. p. 31. l. 27. marg. in lib. 1. lin. 34. & B A. lin. 40. I D, D K. p. 32. l. 15. & D H. p. 36. l. 21. figura) p. 40. l. 17. (53. ex 5.) l. 33. intercipiuntur, &. l. 38. ergo C A. p. 46. l. 5. ita inquam. p. 49. l. 35. componebatur insuper. p. 50. l. 46. B G b, & d e b. p. 56. l. 15. marg. 4. & 13. l. 48. pariterque L D. p. 62. l. 7. fit D A. p. 70. l. 14. marg. 56. 57. lib. 1. & 30. lib. 2. p. 72. l. 12. maior quam. p. 73. l. 13. mar. 33. 34. lib. 1. p. 78. l. 4. reddantur, & textus. p. 86. l. 17. applicetur que recta. p. 96. l. 7. super bipartitionem axis. p. 99. l. 11. ex vero P F minor quam D P. l. 44. legi 44. 45. in qua. p. 109. l. 20. dele postillam. p. 110. l. 31. marg. appone d. p. 111. l. 31. aut minor angulo. p. 129. l. 35. & inuertendo. ibidem marg. 10. huius. p. 130. l. 26. dele omnia ab O G vsq; ad comparando. p. 138. l. 8. opposita. p. 139. l. 18. mar. d. p. 141. l. 8. mar. 14. lib. 1. p. 146. l. 18. mar. 12. 13. lib. 1. p. 151. l. 18. mar. 8. & 11. addit. lib. 5. l. 19. M L, & R L. l. 22. æqualibus axium. p. 161. l. 13. ductam in hyperbola) p. 168. l. 30. quod est. p. 172. l. 29. sed in primo casu recta linea. l. 30. basim F I. ibid. puncta I, & F; nec F I secat bifariam subtensas G E, M K; propterea. p. 175. l. 26. mar. a. l. 35. ad duas. p. 176. l. 15. mar. d. p. 183. l. 1. mar. d. p. 189. l. 29. mar. lemma 7. l. 47. applicata. p. 190. l. 8. mar. prop. 2. præmis. p. 193. l. 6. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. p. 196. l. 25. nempe X a. p. 197. l. 29. ad L P. p. 202. l. 23. mar. 18. huius. p. 207. l. 6. quod. l. 33. mar. a. p. 213. l. 11. hyperbolen E Z. p. 214. l. 38. mar. ex 20. huius. p. 217. l. 21. ideoque ei æqualis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur qualibet alia intercepta K L æquidistans. p. 223. l. 6. mar. Schol. prop. 6. addit. p. 228. l. 18. ergo comparando homologorum differentias. ibid. mar. lem. 3. lib. 1. p. 233. l. 4. mar. prop. 7. & ex 8. addit. p. 235. l. 37. hyperbolen H I K. p. 240. l. 3. mar. f. p. 244. l. 14. & I F R, seu H F N, & I F S. p. 248. l. 35. fit sectio. p. 250. l. 4. quod L O. p. 256. l. 12. parallela. p. 259. l. 12. quàm A C. p. 260. l. 16. per eundem. p. 262. l. 1. eandem. l. 4. A D, &. l. 41. & eam, quæ. p. 264. l. 13. secabit rectam. p. 268. l. 22. conus E A C. p. 269. l. 8. mar. ex prop. 5. lib. 1. l. 9. 10. 20. expunge recto. l. 15. sectionis F A G. p. 275. l. 10. rectangulo A D F. p. 280. l. 14. G E A eandem. p. 291. l. 3. XXIX. XXVII. p. 298. l. 6. XXIIX. XXVI. p. 303. l. 16. erectum. p. 306. l. 23. ad perfectionem prop. 26. p. 313. l. 7. mar. prop. 26. huius. p. 318. l. 25. quàm G H E ad E H, & (quando G cadit inter E, & H), multo maiorem quàm G E. p. 319. l. 17. E H ab ipso quadrato G E. p. 321. l. 9. quadrato E G. l. 31. XXXV. XXXVI. p. 323. l. 2. diametri ad easdem partes. p. 325. l. 7. 21. & 23. (16. ex. 7.) p. 326. l. 11. quæ est dupla. l. 14. M E ad. l. 20. (16. ex 7.) p. 327. quàm D H A ad A H, & in primo casu multo maiorem, quàm. p. 328. l. 33. latus C O. p. 329. l. 22. quàm E D O in O E. p. 331. l. 27. vt axis transuersus A C. p. 335. l. 7. ipsius P R supra P Q. l. 11. aggregati M G, H E. p. 338. l. 18. G E, & E H. p. 341. l. 3. axis transuersi C A. p. 343. l. 9. mar. dele b. p. 344. l. 7. mar. b. p. 346. l. 15. mar. c. p. 347. l. 7. ad quadratum Q P R, &. p. 350. l. 13. O H, & G E. p. 356. l. 14. mar. lem. 15. p. 386. l. 31. mar. lib. 4. Coll. prop. 14. p. 391. l. 9. mar. lib. 4. Coll. prop. 13. p. 392. l. 15. quæ erit. p. 404. l. 37. A B E, A C E.

Errata in figuris.

Pag. 12. in eius figura deest recta N Q, & D terminus axis. pag. 22. fig. 1. deest recta I N. pag. 30. in parabola deest N in occursu B F, G H. pag. 37. deest P in puncto incidentiæ perpendicularis à puncto I super S K. pag. 46. deest A in vertice axis. pag. 93. deest recta L O. pag. 112. in tribus sequentibus figuris deest ramus I B. pag. 213. fig. 1. literæ C, Q commutari debent. pag. 240. fig. 2. & pag. 246. producantur F L, H I ad K. pag. 268. fig. 2. linea curua A Z duci debet inter A G, & A D. pag. 368. fig. 3. in puncto I ponatur X.



